
WYMIAROWANIE

słupów o przekroju kołowym

Poradnik studenta i inżyniera



WSTĘP

SŁUPY O PRZEKROJACH KOŁOWYCH SĄ POWSZECHNIE STOSOWANE W PRAKTYCE BUDOWLANEJ. ICH ZBROJENIE JEST RÓWNOMIERNIE ROZŁOŻONE RÓWNOLEGLE DO OBWODU PRZEKROJU. STOSUJE SIĘ PRZY TYM CO NAJMNIEJ 6 PRĘTÓW. W PRZEKROJACH PROSTOKĄTNYCH O ZBROJENIACH USYTUOWANYCH PRZY KRAWĘDZIACH MOŻNA JEDNOZNACZNIE WYDZIELIĆ ZBROJENIE ŚCISKANE I ROZCIĄGANE – JEŻELI JEST STREFA ROZCIĄGANA W PRZEKROJU – LUB MNIEJ I BARDZIEJ ŚCISKANE, GDY CAŁY PRZEKRÓJ JEST ŚCISKANY.

W przypadku słupów o przekroju kołowym, równomierne rozmieszczenie prętów powoduje, że liczba prętów ściskanych (i rozciąganych) zmienia się przy zmianie zasięgu strefy ściskanej. Przy wymiarowaniu nie stosuje się zatem oznaczeń typu $A_{s2}(\rho_2)$ i $A_{s1}(\rho_1)$, lecz operuje się ogólnym oznaczeniem $A_s = n a_s$. Liczbę prętów tworzących zbrojenie podłużne słupa oznaczono jako n , a powierzchnię przekroju pojedynczego pręta jako a_s .

Takie usytuowanie zbrojenia i w konsekwencji taki opis zbrojenia skutkuje tym, że w odróżnieniu od słupów o przekroju prostokątnym ma się do czynienia nie z dwiema niewiadomymi A_{s2} i A_{s1} , lecz jedynie jedną A_s . Dzięki temu zagadnienie staje się statycznie wyznaczalne i nie stosuje się żadnych dodatkowych założeń.

Problemy rachunkowe pojawiają się natomiast ze względu na kształt przekroju, którego szerokość zmienia się w sposób ciągły.

Do wymiarowania można wykorzystywać zarówno model ogólnej zależności pomiędzy odkształceniami i naprężeniami w betonie, jak i uproszczony – sprężysto-plastyczny. Są one naturalnie powiązane z prawem płaskich przekrojów. Najprostszy model zakładający stałą wartość naprężeń w strefie ściskanej prowadzi do wyników zbieżnych z pozostałymi jedynie w przypadku, gdy w przekroju jest strefa rozciągana. Gdy cały przekrój jest ściskany, model ten przestaje być użyteczny. Najwygodniej jest korzystać z modelu zakładającego sprężysto-plastyczną charakterystykę betonu w strefie ściskanej.



SPIS TREŚCI

WSTĘP	2
WYMIAROWANIE PRZEKROJÓW ZE STREFA ROZCIĄGANĄ	4
Zbrojenie	4
Beton	15
WYMIAROWANIE PRZEKROJÓW CAŁKOWICIE ŚCISKANYCH	20
Zbrojenie	21
Beton	23
WYZNACZANIE NOŚNOŚCI PRZEKROJÓW KOŁOWYCH	26
WYMIAROWANIE PRZEKROJÓW KOŁOWYCH W SPOSÓB PRZYBLIŻONY	31

WYMIAROWANIE PRZEKROJÓW ZE STREFĄ ROZCIĄGANĄ

Z względu na kształt przekroju za zmienną niezależną wygodnie jest przyjąć kąt środkowy okręgu α o początku w osi pionowej przekroju. Kąt α_0 określa zasięg strefy ściskanej. Przy zmiennej szerokości przekroju i zmieniających się wartościach naprężeń w betonie siłę oblicza się, całkując wartości naprężeń po polu ściskanego przekroju:

$$N_c(\alpha_0) = 2r^2 \int_0^{\alpha_0} \sigma_c(\phi) \sin^2 \phi d\phi.$$

Postępując w analogiczny sposób, można wyznaczyć wartość momentu wywołanego tą siłą i obliczonego względem osi poziomej przekroju:

$$M_c(\alpha) = 2r^3 \int_0^{\alpha_0} \sigma_c(\alpha) \sin^2 \alpha \cos \alpha d\alpha.$$

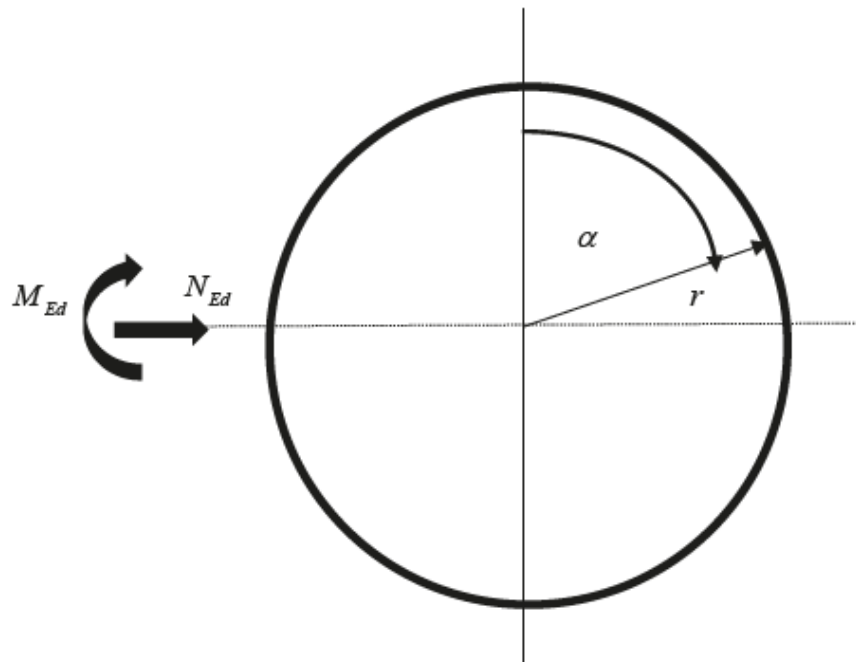
Występujące w tych wzorach naprężenie $\sigma_c(\alpha)$ ustala się, korzystając z prawa płaskich przekrojów i wybranego modelu betonu. Ze względu na przebieg naprężeń, które po przekroczeniu przez odkształcenia wartości ϵ_{c3} (lub w modelu ogólnym ϵ_{c2}) są już stałe, należy wyznaczyć wartość kąta odpowiadającego temu poziomowi odkształceń (rys. 1).

Zbrojenie

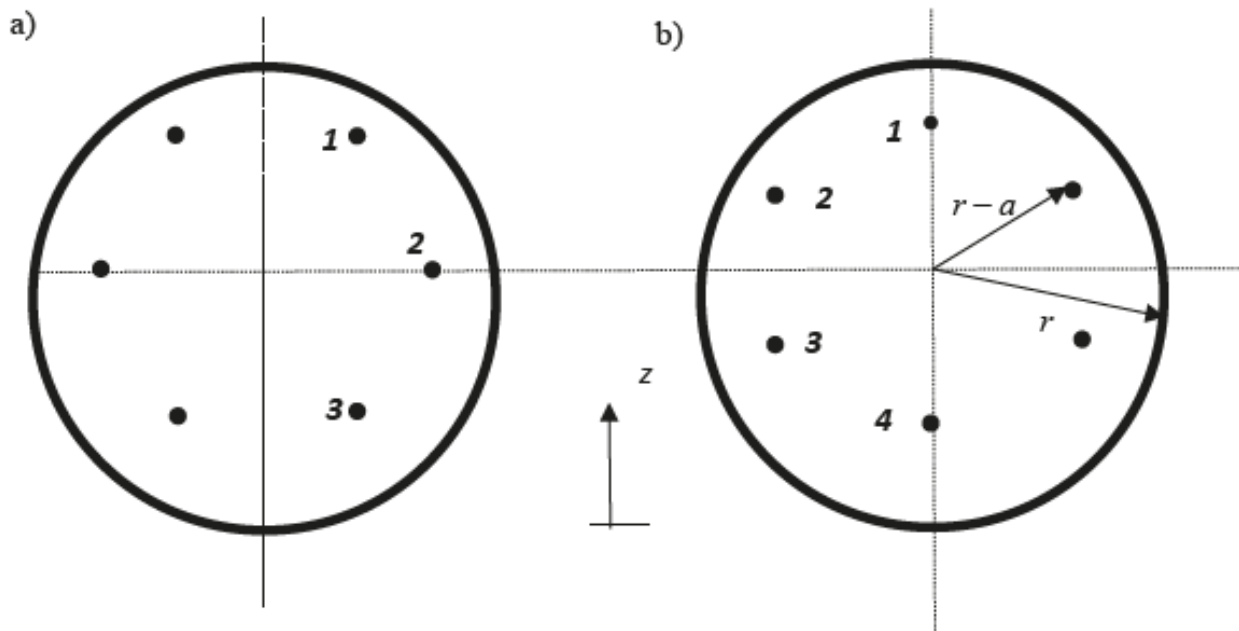
W odróżnieniu od betonu, gdzie siły rozłożone są w sposób ciągły, w zbrojeniu ma się do czynienia z siłami działającymi jedynie w ściśle określonych miejscach (rys. 2).

W przypadku prętów usytuowanych w osi pionowej względne położenie poszczególnych prętów obliczane względem dolnej krawędzi wynosi

$$4: z_4 = r \frac{a}{r}; \quad 3: z_3 = \frac{1}{2} r \left(1 + \frac{a}{r} \right); \quad 2: z_2 = \frac{1}{2} r \left(3 - \frac{a}{r} \right); \quad 1: z_1 = r \left(2 - \frac{a}{r} \right).$$



Rys. 1. Ogólny widok przekroju i użytych oznaczeń



Rys. 2. Możliwe (graniczne) układy prętów zbrojeniowych w przekroju – dla 6 prętów

Rozkład odkształceń w przekroju w stanie granicznym nośności można zapisać w postaci

$$\varepsilon_s(z) = \frac{\varepsilon_{cu3}}{1 - \cos \alpha} \left[\frac{z}{r} - 1 - \cos \alpha \right].$$

Początek osi przyjęto przy dolnej krawędzi przekroju. Wstawienie współrzędnych poszczególnych punktów pozwala wyznaczyć odkształcenia w tych prętach:

$$\varepsilon_{s4}(z) = \frac{\varepsilon_{cu3}}{1 - \cos \alpha} \left[\frac{a}{r} - 1 - \cos \alpha \right], \quad \varepsilon_{s3}(z) = \frac{\varepsilon_{cu3}}{1 - \cos \alpha} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{a}{r} + 1 \right) - \cos \alpha \right],$$

$$\varepsilon_{s2}(z) = \frac{\varepsilon_{cu3}}{1 - \cos \alpha} \left[-\frac{1}{2} \left(1 - \frac{a}{r} \right) - \cos \alpha \right], \quad \varepsilon_{s1}(z) = \frac{\varepsilon_{cu3}}{1 - \cos \alpha} \left[1 - \frac{a}{r} - \cos \alpha \right].$$

W dalszej kolejności oblicza się $s_i = \varepsilon_{si} / \varepsilon_{pl}$ i jeżeli $s_i > 1$, to przyjmuje się 1, a gdy $s_i < 1$, to należy przyjąć -1 . Siłę w pojedynczym pręcie oblicza się jako $N_{si} = s_i f_{yd} \rho A_c / 6$. W efekcie można wyznaczyć wartość względnej siły w zbrojeniu z zależności

$$n_s = \frac{N_s}{A_c f_{cd}} = \frac{f_{yd}}{f_{cd}} \rho \frac{s_1 + 2s_2 + 2s_3 + s_4}{6} = \omega \frac{s_1 + 2s_2 + 2s_3 + s_4}{6}.$$

Aby wyznaczyć wartość momentu wywołanego tymi siłami, ustala się ramiona ich działania względem osi poziomej. Przyjmując, że momenty lewoskrętne są dodatnie, można zapisać

$$r_4 = r \left(1 - \frac{a}{r} \right); \quad r_2 = -r \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a}{r} \right); \quad r_1 = -r \left(1 - \frac{a}{r} \right).$$

Moment indukowany przez pojedynczy pręt jest równy $M_{si} = r_i s_i f_{yd} \rho A_c / 6$. Względny moment wywołany zbrojeniem można obliczyć, korzystając ze wzoru

$$m_s = \frac{M_s}{d A_c f_{cd}} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a}{r} \right) \frac{f_{yd}}{f_{cd}} \rho \frac{-s_1 - s_2 + s_3 + s_4}{6} = \omega \frac{-s_1 - s_2 + s_3 + s_4}{12} \left(1 - \frac{a}{r} \right).$$

W analogiczny sposób analizuje się siły w zbrojeniu, gdy pręty usytuowane są symetrycznie względem osi poziomej (rys. 5.2a). Rozkład odkształceń jest oczywiście taki sam jak poprzednio, a różnice wynikają jedynie z położenia prętów.

$$z_3 = r \left[1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \left(1 - \frac{a}{r} \right) \right], \quad z_2 = r, \quad z_1 = r \left[1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(1 - \frac{a}{r} \right) \right].$$

W związku z tym odkształcenia w prętach na poszczególnych poziomach wynoszą:

$$\varepsilon_{s3} = \frac{\varepsilon_{cu3}}{\cos \alpha - 1} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \left(1 - \frac{a}{r} \right) + \cos \alpha \right], \quad \varepsilon_{s2} = \frac{\varepsilon_{cu3}}{\cos \alpha - 1} \cos \alpha,$$

$$\varepsilon_{s1} = \frac{\varepsilon_{cu3}}{\cos \alpha - 1} \left[\cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \left(1 - \frac{a}{r} \right) \right].$$

Postępując w sposób analogiczny do opisanego, można obliczyć względną siłę w zbrojeniu jako

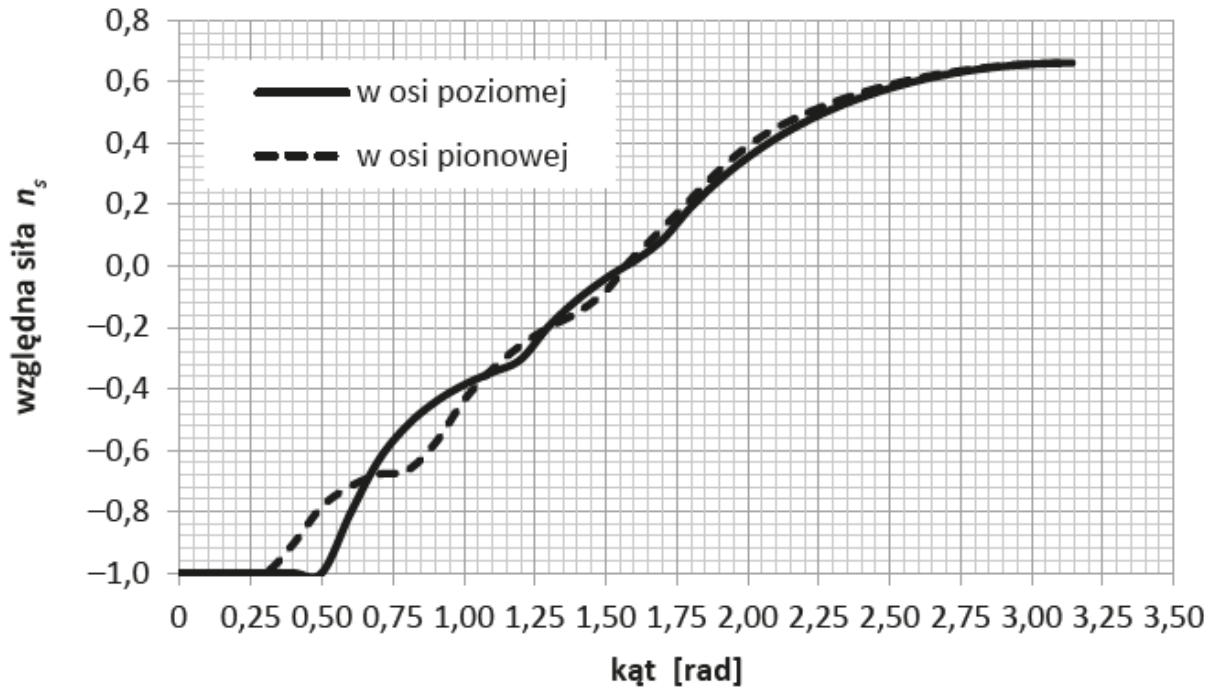
$$n_s = \frac{N_s}{A_c f_{cd}} = \frac{f_{yd}}{f_{cd}} \rho \frac{2s_1 + 2s_2 + 2s_3}{6} = \omega \frac{s_1 + s_2 + s_3}{3}.$$

Momenty zginające obliczane względem osi poziomej wywołują jedynie siły w prętach oznaczonych jako

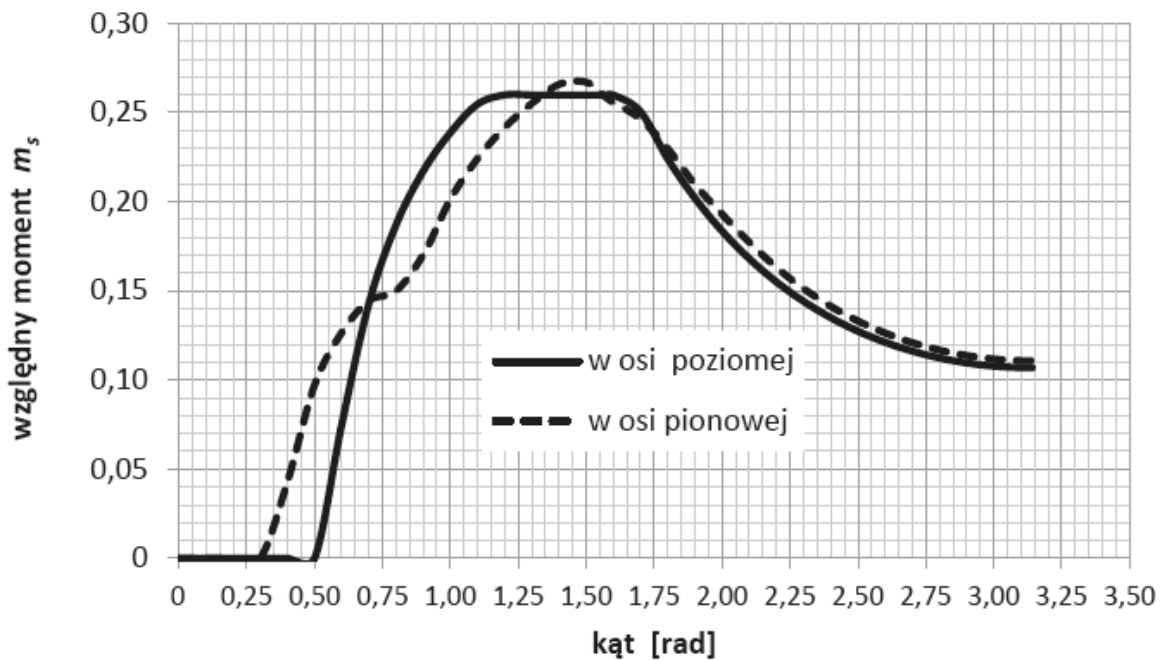
1 i 3. Ramiona tych sił są równe $r \frac{\sqrt{3}}{2} \left(1 - \frac{a}{r} \right)$. Względny moment jest więc równy.

$$m_s = \frac{M_s}{d A_c f_{cd}} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} \left(1 - \frac{a}{r} \right) \frac{f_{yd}}{f_{cd}} \rho \frac{s_1 - s_3}{3} = \omega \left(1 - \frac{a}{r} \right) \frac{\sqrt{3}}{12} (s_1 - s_3).$$

Przykładowe wyniki obliczeń względnej siły i względnego momentu przedstawiono na rysunkach dwóch poniższych rysunkach. Widać na nich, że wpływ usytuowania prętów w przekroju jest obserwowalny. Szczególnie dotyczy to takich kątów, którym odpowiada ujemna wartość wypadkowej siły w zbrojeniu (rozciąganie). W rzeczywistości usytuowanie prętów względem osi działania siły nie jest w wielu przypadkach znane i w rachubę mogą wchodzić również wszystkie pośrednie orientacje.

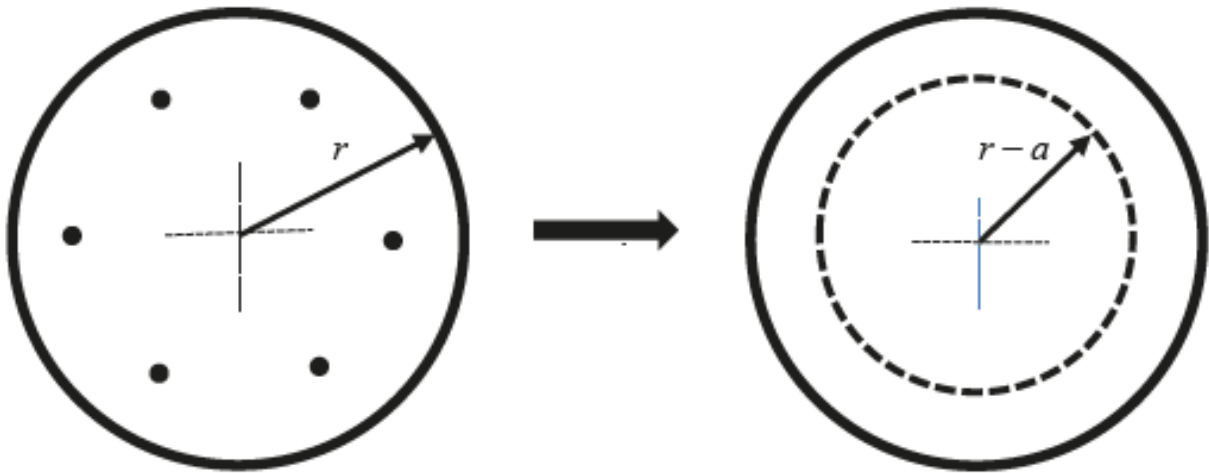


Rys. 3. Wykresy względnych wartości siły w zbrojeniu jako funkcji zasięgu strefy ściskanej przy dwóch różnych ułożeniach prętów



Rys. 4. Wykresy względnych momentów generowanych przez zbrojenie

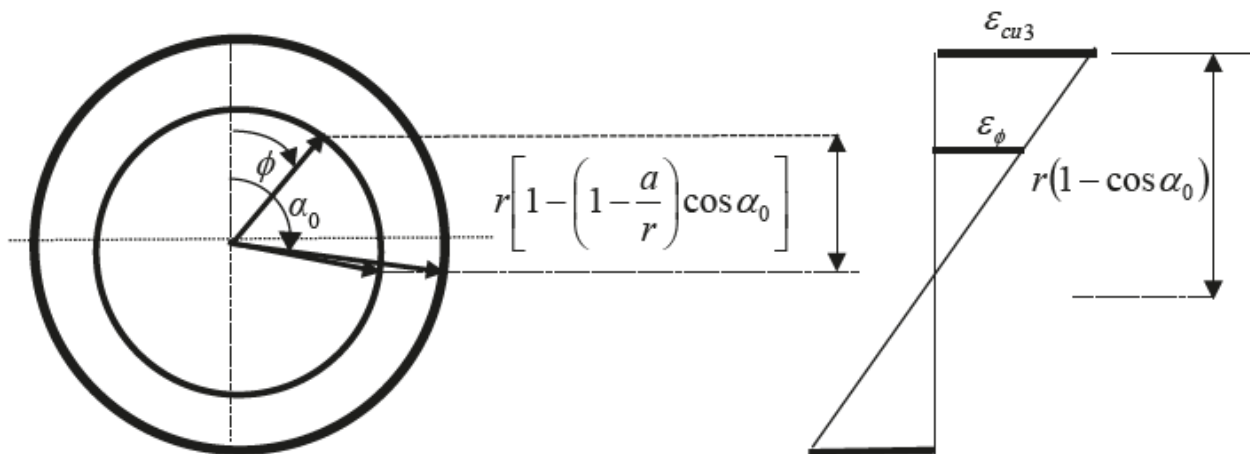
W projektowaniu trzeba brać pod uwagę stosowanie również innej niż 6 liczby prętów i analizy wpływu ich ewentualnego usytuowania. Te właśnie dwa problemy są przesłanką do przyjęcia w obliczeniach koncepcji zbrojenia „rozmytego”. Polega ona na zastąpieniu zbrojenia usytuowanego w określonych punktach po obwodzie słupa zbrojeniem rozłożonym ciągle.



Rys. 5. Idea zastępowania zbrojenia zbrojenia rozłożonego – rozmytym

Zamiast sumarycznego pola zbrojenia A_s , przyjmuje się zbrojenie równomiernie rozłożone o intensywności

$a_{sr} = \frac{A_s}{2\pi(r-a)} = \frac{A_s}{2\pi r \left(1 - \frac{a}{r}\right)}$ i określa się w sposób ciągły rozkład odkształceń w tym zbrojeniu.



Rys. 6. Układ służący wyznaczaniu sił i momentów generowanych przez zbrojenie

Położenie osi obojętnej określa kąt α_0 . Odpowiada on kątowi β_0 odniesionemu do położenia zbrojenia. Prowadzi to do następującej zależności:

$$\cos \beta_0 = \frac{r \cos \alpha_0}{r - a} = \frac{\cos \alpha_0}{1 - \frac{a}{r}}.$$

Zależność odkształcenia w stali od położenia (kąta ϕ) określa zatem równanie

$$\varepsilon(\phi) = \frac{\varepsilon_{cu3}}{1 - \cos \alpha_0} \left[\left(1 - \frac{a}{r} \right) \cos \phi - \cos \alpha_0 \right].$$

Jednostkowa siła w przekroju określonym przez kąt ϕ wynosi

$$dN_s(\phi) = a_{sr} \sigma_s(\phi) ds = a_{sr} \sigma_s(\phi) (r - a) d\phi = a_{sr} \varepsilon_s(\phi) E_s (r - a) d\phi.$$

Po uwzględnieniu zależności pomiędzy a_{sr} i A_s oraz tego, że $E_s = f_{yd} / \varepsilon_{pl}$ otrzymuje się

$$dN_s(\phi) = \frac{A_s f_{yd}}{2\pi} \frac{\varepsilon_s(\phi)}{\varepsilon_{pl}} d\phi.$$

Całkowitą siłę w zbrojeniu oblicza się, całkując (5.16) uwzględniając przy tym, że jeżeli $|\varepsilon_s| \geq \varepsilon_{pl}$, to należy przyjmować w obliczeniach stałą wartość naprężeń równą f_{yd} lub $-f_{yd}$. W odniesieniu do zbrojenia ściskanego prowadzi to do warunku

$$\cos \beta_c \geq \frac{(1 - \cos \alpha) \frac{\varepsilon_{pl}}{\varepsilon_{cu3}} + \cos \alpha}{\left(1 - \frac{a}{r} \right)}.$$

Warunek ten oznacza, że obliczając siły dla przekroju, w którym oś obojętna jest określona przez kąt α , w przedziale $\phi \in (0; \beta_c)$ mamy do czynienia ze stałą wartością naprężeń równą f_{yd} . Zbrojenie jest ściskane i w pełni wykorzystane. Otrzymuje się wtedy

$$n_s = \frac{N_s}{f_{cd} A_c} = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\beta_c} d\phi = \omega \frac{\beta_c}{\pi}.$$

Drugą granicą jest kąt β_1 . Określa on miejsce, gdzie stal jest już w pełni wykorzystana na rozciąganie:

$$\cos \beta_1 = \frac{\frac{\varepsilon_{pl}}{\varepsilon_{cu3}} (\cos \alpha - 1) + \cos \alpha}{\left(1 - \frac{a}{r}\right)}.$$

Jeżeli $\phi \in \langle \beta_1; \pi \rangle$, to naprężenia w zbrojeniu jest równe $-f_{yd}$, a względna siła jest równa

$$n_s = \frac{N_s}{f_{cd} A_c} = -\frac{\omega}{\pi} \int_{\beta_1}^{\pi} d\phi = -\omega \frac{\pi - \beta_1}{\pi}.$$

Względną siłę w przedziale $\phi \in \langle \beta_c; \beta_1 \rangle$ oblicza się, wykonując całkowanie w podanych granicach:

$$N_s(\phi) = \int_{\beta_c}^{\beta_1} \frac{A_s f_{yd}}{\pi} \frac{\varepsilon_{cu3}}{\varepsilon_{pl}} \frac{1}{1 - \cos \alpha_0} \left[\left(1 - \frac{a}{r}\right) \cos \phi - \cos \alpha_0 \right] d\phi.$$

Względna siła jest więc równa

$$n_s(\phi) = \omega \frac{\varepsilon_{cu3}}{\varepsilon_{pl}} \frac{1}{1 - \cos \alpha_0} \left[\left(1 - \frac{a}{r}\right) \sin \phi - \phi \cos \alpha_0 \right]_{\beta_c}^{\beta_1}.$$

W podobny sposób można wyznaczyć względną moment wywołany tymi siłami. Ramię działania siły jest równe $(r - \alpha) \cos \phi$. W ogólnej postaci moment można zapisać jako

$$m_s = \frac{M_s}{f_{cd} A_c d} = \frac{A_s f_{yd}}{2\pi f_{cd} A_c} \left(1 - \frac{a}{r}\right) \int_0^{\pi} \frac{\varepsilon_s(\phi)}{\varepsilon_{pl}} \cos \phi d\phi = \left(1 - \frac{a}{r}\right) \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\varepsilon_s(\phi)}{\varepsilon_{pl}} \cos \phi d\phi.$$

Podobnie jak przy obliczaniu sił należy uwzględnić graniczne wartości kątów w kontekście wykorzystania zbrojenia.

W przedziale $\phi \in \langle 0; \beta_c \rangle$ odkształcenia są większe od plastycznych i naprężenia mają stałą wartość f_{yd} . Zbrojenie jest ściskane i w pełni wykorzystane. Wzór przybiera wtedy następującą postać:

$$m_s = \left(1 - \frac{a}{r}\right) \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\beta_c} \cos \phi d\phi = \left(1 - \frac{a}{r}\right) \frac{\omega}{2\pi} \sin \beta_c.$$

W przedziale $\phi \in \langle \beta_c; \beta_1 \rangle$ stal jest na jego początku ściskana, a później rozciągana, ale nigdzie nie ulega uplastycznieniu (nie jest w pełni wykorzystana). Do wzoru należy wstawić

$$\varepsilon(\phi) = \frac{\varepsilon_{cu3}}{1 - \cos \alpha_0} \left[\left(1 - \frac{a}{r}\right) \cos \phi - \cos \alpha_0 \right].$$

Otrzymuje się wtedy

$$m_s = \left(1 - \frac{a}{r}\right) \frac{\omega}{2\pi} \int_{\beta_c}^{\beta_t} \frac{\varepsilon_s(\varphi)}{\varepsilon_{pl}} \cos \varphi d\varphi =$$

$$\left(1 - \frac{a}{r}\right) \frac{\omega}{2\pi \varepsilon_{pl}} \frac{\varepsilon_{cu3}}{1 - \cos \alpha} \int_{\beta_c}^{\beta_t} \left(1 - \frac{a}{r}\right) \cos^2 \varphi - \cos \varphi \cos \alpha d\varphi$$

Wynikiem całkowania jest formuła, którą można zapisać następująco:

$$m_s = \left(1 - \frac{a}{r}\right) \frac{\omega}{2\pi \varepsilon_{pl}} \frac{\varepsilon_{cu3}}{1 - \cos \alpha} \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{a}{r}\right) (\cos \varphi \sin \varphi + \varphi) - \sin \varphi \cos \alpha \right]_{\beta_c}^{\beta_t}$$

W ostatnim przedziale stal jest wykorzystana na rozciąganie i

$$m_s = -\left(1 - \frac{a}{r}\right) \frac{\omega}{2\pi} \int_{\beta_t}^{\pi} \cos \varphi d\varphi = \left(1 - \frac{a}{r}\right) \frac{\omega}{2\pi} \sin \beta_t$$

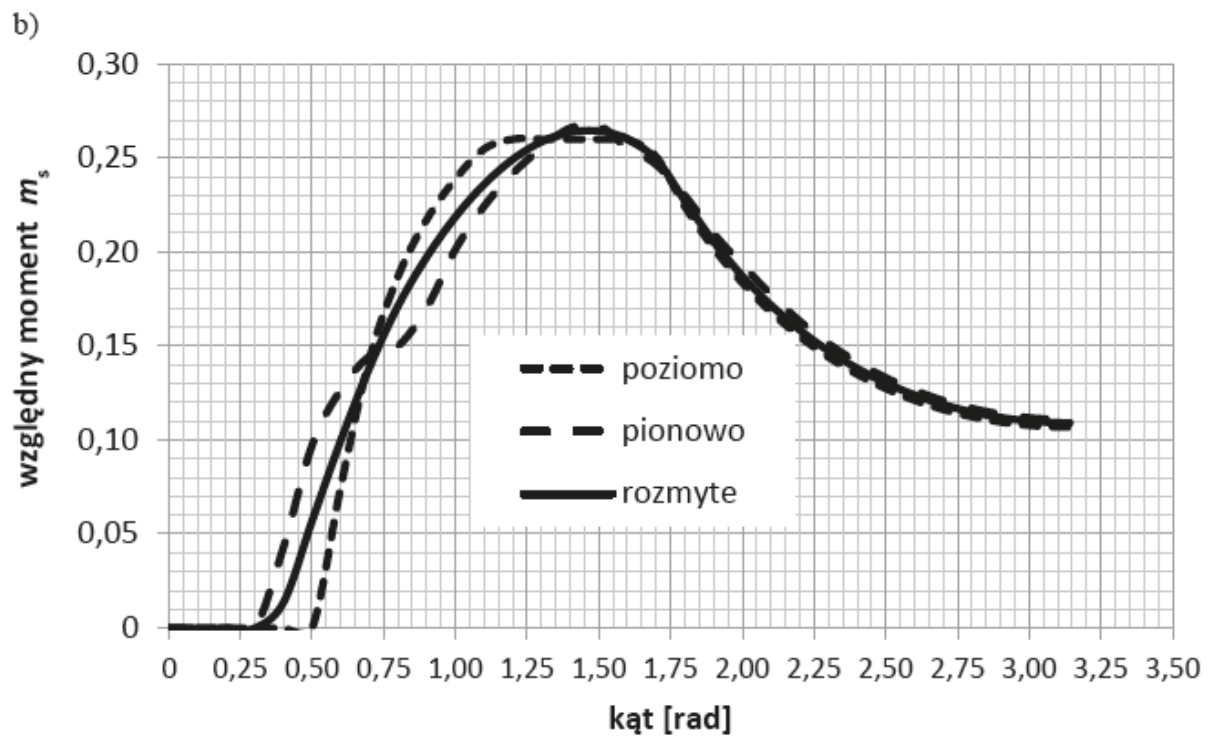
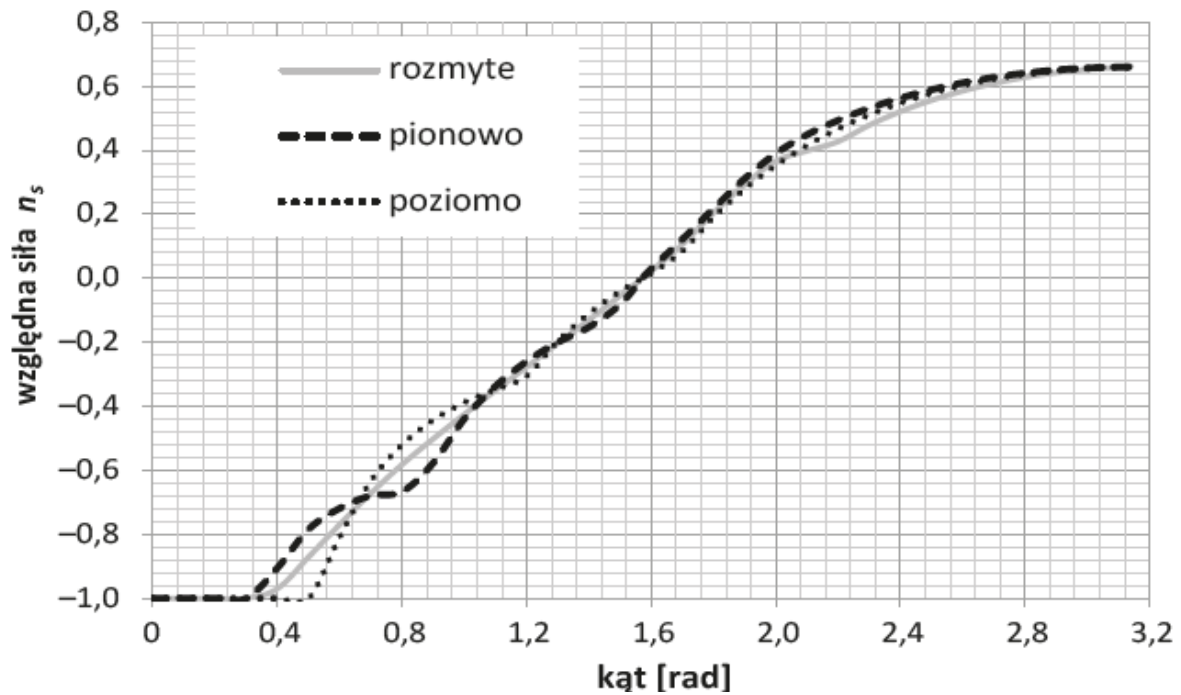
Na rysunku 7 pokazane są wyniki obliczeń sił i momentów dla $a/r = 0,1$.

Na tym rysunku 8 pokazano analogiczne zestawienie, ale dla $a/r = 0,2$. O ile w pierwszym przypadku widoczne są niewielkie różnice pomiędzy otrzymanymi wynikami – szczególnie w przedziale do $\pi/2$, o tyle przy $a/r = 0,1$ stają się one już niewielkie. Warto też zauważyć, że wyniki uzyskane z modelu rozmytego zbrojenia są pośrednie. Jest to jedna z przesłanek do przyjęcia właśnie tej koncepcji do prowadzenia obliczeń.

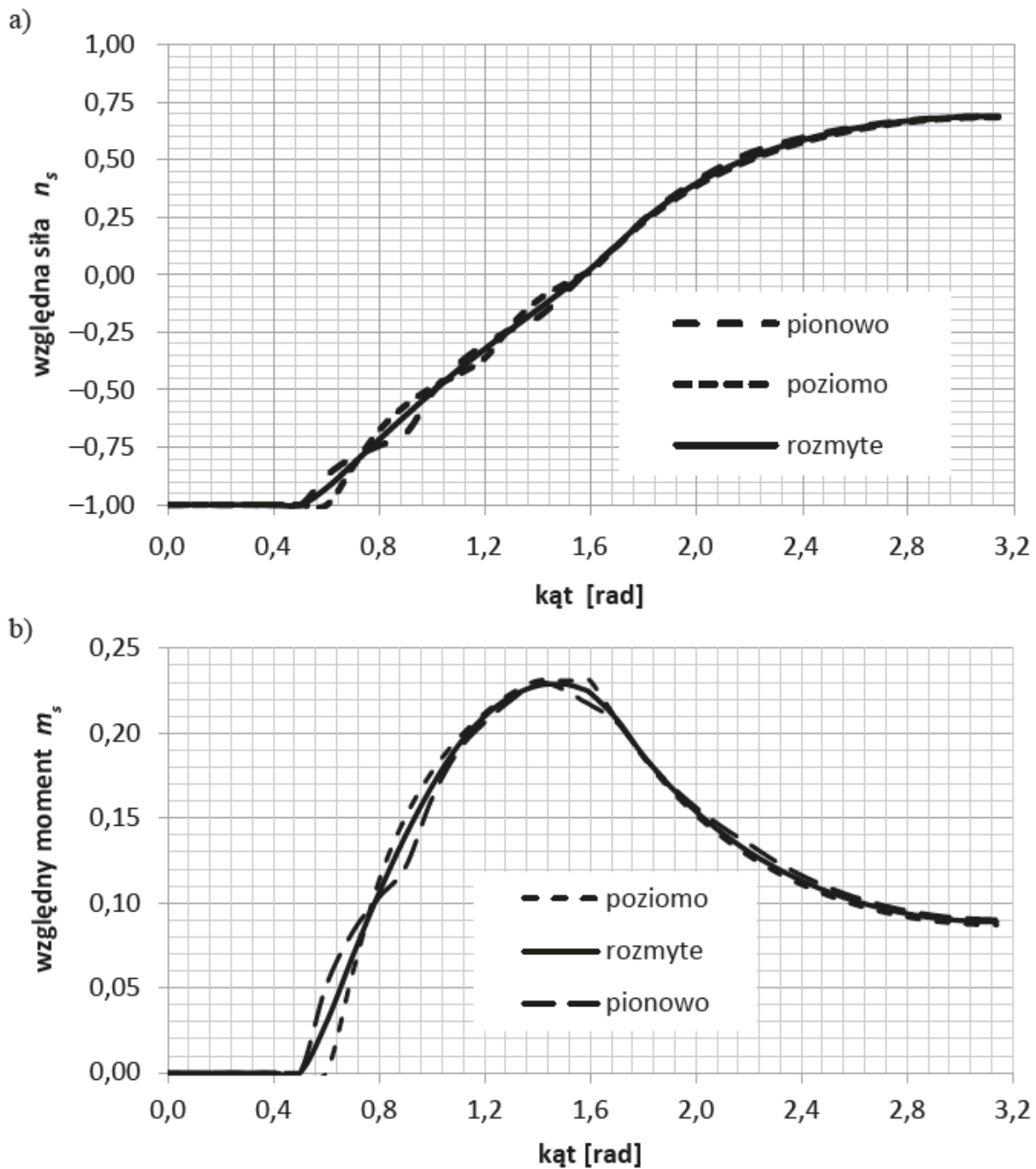
Włodzimierz STAROSOLSKI KONSTRUKCJE ŻELBETOWE

**to najbardziej rozpoznawalna seria w środowisku budowlanym,
rozwijana w kolejnych wydaniach od ponad 30 lat.**
**Jest to znakomity podręcznik dla studentów, a także niezastąpione
źródło informacji i praktycznych wskazówek dla inżynierów.**





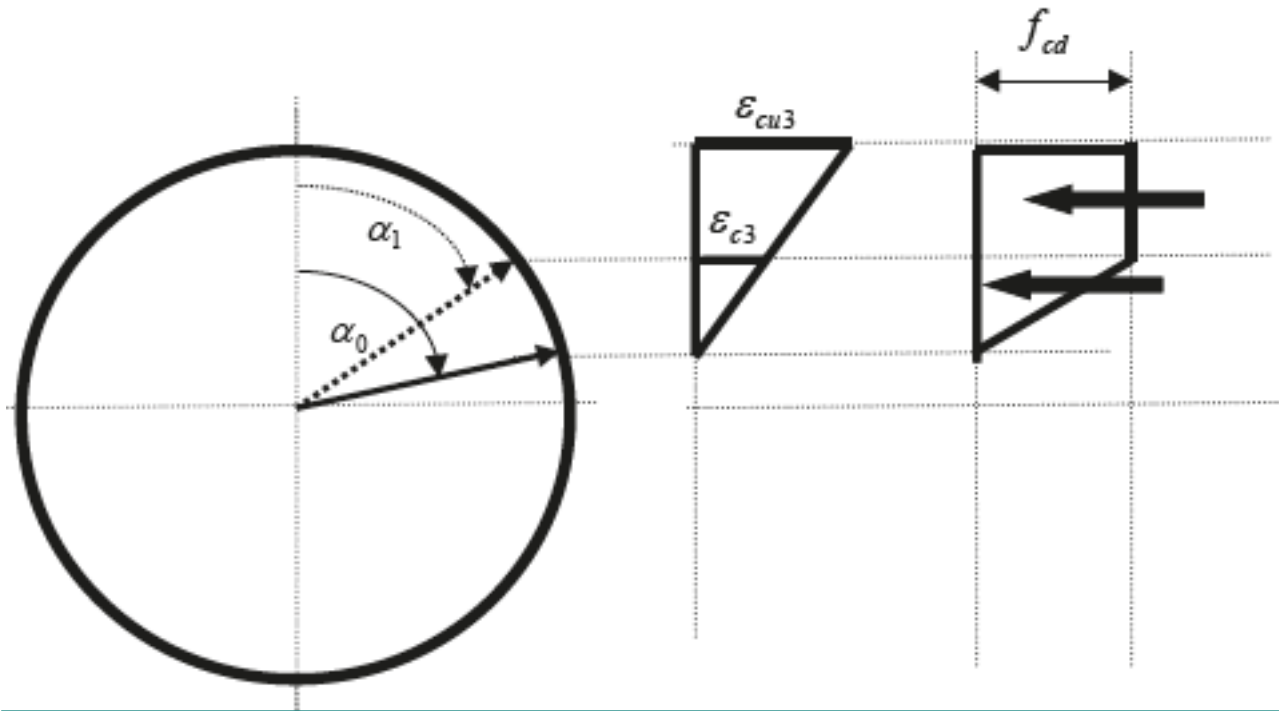
Rys. 7. Porównania wyników obliczeń względnych sił (a) i momentów (b) przy wykorzystaniu trzech koncepcji modelowania układu zbrojenia w przekroju, $a/r = 0,1$



Rys. 8. Porównanie wyników obliczeń względnych sił (a) i momentów (b) przy wykorzystaniu trzech koncepcji modelowania układu zbrojenia w przekroju, $a/r = 0,2$

Beton

Wzory w ogólnej pozwalają obliczać wartości sił i momentów wywołanych przez ściskany beton. Bliższa analiza pozwala stwierdzić, że przyjęcie do praktycznych obliczeń ogólnego modelu betonu prowadzi do dużych problemów rachunkowych. Dotyczy to betonów klas wyższych niż C50. Z tego względu w dalszych rozważaniach ograniczono się do modelu uproszczonego, który daje praktycznie takie same wyniki przy zdecydowanie mniejszych problemach rachunkowych.



Rys. 9. Układ sił wewnętrznych w przekroju w betonie

Zasięg strefy ściskanej jest określony przez kąt środkowy α_0 . Zmienia się on w przedziale od 0 do π . Korzystając z prawa płaskich przekrojów, można ustalić zależność wartości odkształceń od bieżącego położenia określonego przez kąt φ :

$$\varepsilon_c(\varphi) = \frac{\varepsilon_{cu3}}{1 - \cos \alpha_0} (\cos \varphi - \cos \alpha_0).$$

W przedziale od 0 do α_1 naprężenie w betonie jest stałe, gdyż $\varepsilon_c(\varphi) \geq \varepsilon_{c3}$. Wstawiając wartość ε_{c3} , można wyznaczyć wartość tego kąta

$$\varepsilon_c(\varphi) = \frac{\varepsilon_{cu3}}{1 - \cos \alpha_0} (\cos \varphi - \cos \alpha_0).$$

W drugim przedziale – od α_1 do α_0 – naprężenie w betonie określone jest zależnością

$$\begin{aligned}\sigma_c(\varphi) &= f_{cd} \frac{\varepsilon_\varphi}{\varepsilon_{c3}} = f_{cd} \frac{\varepsilon_{cu3}}{\varepsilon_{c3}} \frac{1}{1 - \cos \alpha_0} (\cos \varphi - \cos \alpha_0) = \\ &= f_{cd} \frac{\varepsilon_{cu3}}{\varepsilon_{c3}} \frac{\cos \varphi}{1 - \cos \alpha_0} - f_{cd} \frac{\varepsilon_{cu3}}{\varepsilon_{c3}} \frac{\cos \alpha_0}{1 - \cos \alpha_0}\end{aligned}$$

Ogólna postać wzoru określającego siłę w betonie podana jest wzorem

$$N_c(\alpha_0) = 2r^2 \int_0^{\alpha_0} \sigma_c(\phi) \sin^2 \phi \, d\phi.$$

Uwzględniając to, można zapisać go jako sumę trzech całek:

$$\begin{aligned}N_c(\alpha_0) &= 2r^2 f_{cd} \int_0^{\alpha_1} \sin^2 \varphi \, d\varphi + 2r^2 f_{cd} \frac{\varepsilon_{cu3}}{\varepsilon_{c3}} \frac{1}{(1 - \cos \alpha_0)} \int_{\alpha_1}^{\alpha_0} \sin^2 \varphi \cos \varphi \, d\varphi - \\ &- 2r^2 f_{cd} \frac{\varepsilon_{cu3}}{\varepsilon_{c3}} \frac{\cos \alpha_0}{(1 - \cos \alpha_0)} \int_{\alpha_1}^{\alpha_0} \sin^2 \varphi \, d\varphi\end{aligned}$$

Po podzieleniu obu stron równania przez $f_{cd} \pi r^2$ otrzymuje się wzór na wartość względną siły w betonie n_c . Poszczególne składniki siły otrzymuje się, wykonując wskazane całkowanie:

$$n_{c1}(\alpha_0) = \frac{1}{\pi} (\alpha_1 - \sin \alpha_1 \cos \alpha_1),$$

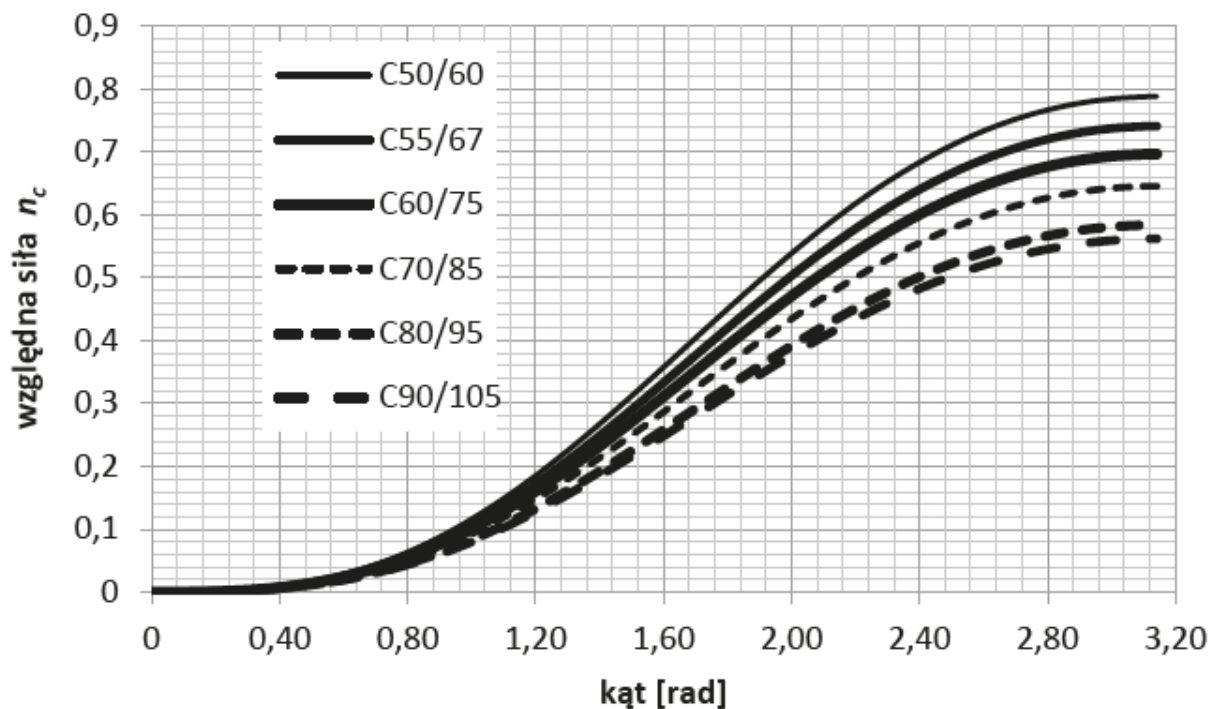
$$n_{c2}(\alpha_0) = \frac{2}{3\pi} \frac{\varepsilon_{cu3}}{\varepsilon_{c3}} \frac{1}{(1 - \cos \alpha_0)} (\sin^3 \alpha_0 - \sin^3 \alpha_1),$$

$$n_{c3}(\alpha_0) = -\frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon_{cu3}}{\varepsilon_{c3}} \frac{\cos \alpha_0}{(1 - \cos \alpha_0)} (\alpha_0 - \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 - \alpha_1 + \sin \alpha_1 \cos \alpha_1).$$

Na rysunku 10 zostały przedstawione wartości n_c dla klas betonu od C50/60 do C90/105. Wykres dotyczący klasy C50/60 jest oczywiście ważny także dla niższych klas betonu.

Uwzględniając, że ramię działania tych sił względem osi poziomej jest równe $r \cos \phi$, można określić wartość momentu

$$\begin{aligned}M_c(\alpha_0) &= 2r^3 f_{cd} \int_0^{\alpha_1} \sin^2 \varphi \cos \varphi \, d\varphi + 2r^3 f_{cd} \frac{\varepsilon_{cu3}}{\varepsilon_{c3}} \frac{1}{(1 - \cos \alpha_0)} \int_{\alpha_1}^{\alpha_0} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \, d\varphi - \\ &- 2r^3 f_{cd} \frac{\varepsilon_{cu3}}{\varepsilon_{c3}} \frac{\cos \alpha_0}{(1 - \cos \alpha_0)} \int_{\alpha_1}^{\alpha_0} \sin^2 \varphi \cos \varphi \, d\varphi\end{aligned}$$



Rys. 10. Wykresy zmian względnej wartości siły w betonie dla różnych klas betonu

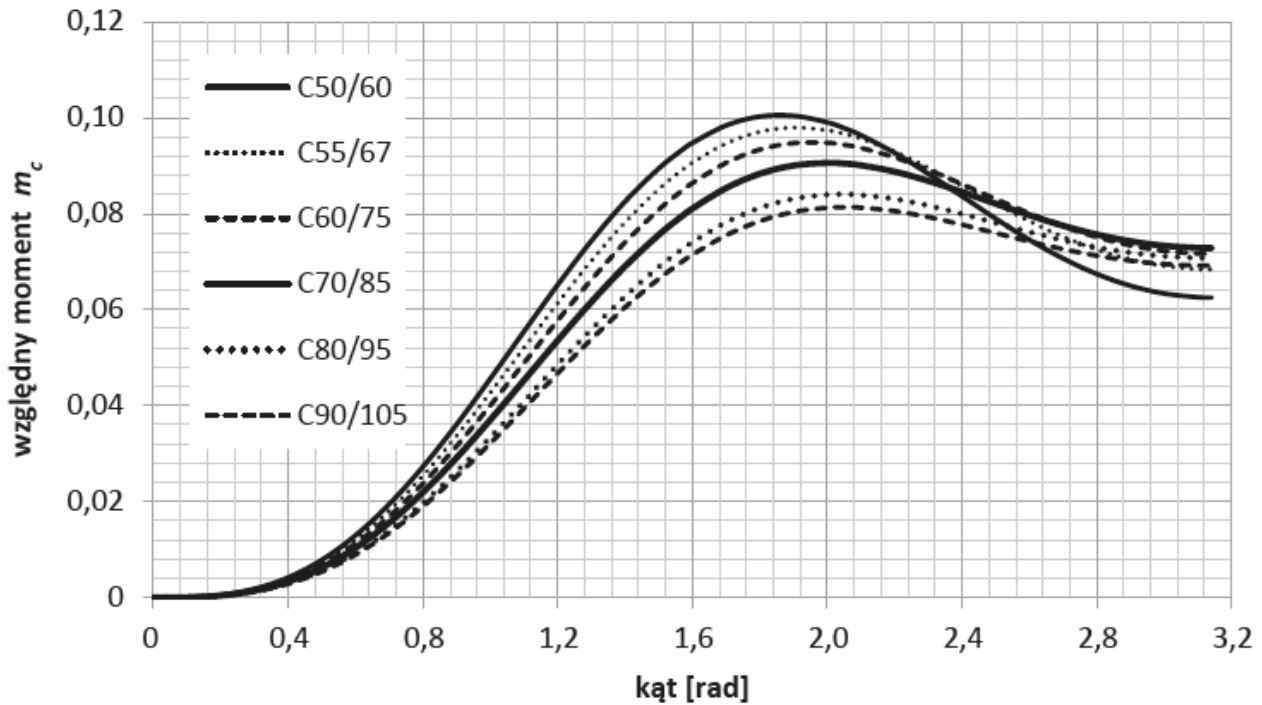
Po podzieleniu obu stron równania przez $f_{cd} \pi r^2$ otrzymuje się wzór na wartość względnego momentu w betonie m_c . Poszczególne składniki siły otrzymuje się, wykonując wskazane całkowania:

$$m_{c1}(\alpha_0) = \frac{1}{3\pi} \sin^3 \alpha_1,$$

$$m_{c2}(\alpha_0) = \frac{1}{4\pi} \frac{\varepsilon_{cu3}}{\varepsilon_{c3}} \frac{1}{(1 - \cos \alpha_0)} \left[\cos x \sin x \left(\frac{1}{2} - \cos^2 x \right) + \frac{1}{2} x \right]_{\alpha_1}^{\alpha_0},$$

$$m_{c3}(\alpha_0) = -\frac{1}{3\pi} \frac{\varepsilon_{cu3}}{\varepsilon_{c3}} \frac{\cos \alpha_0}{(1 - \cos \alpha_0)} (\sin^3 \alpha_0 - \sin^3 \alpha_1).$$

Na rysunku 11 pokazano wyniki obliczeń dla klas betonu od C50/60 do C90/105. Ciekawe jest porównanie wyników otrzymanych dzięki zastosowaniu innych modeli betonu. Model ogólny można bez większych kłopotów rachunkowych zastosować dla betonów klasy nie wyższej niż C50/60.



Rys. 11. Wykresy zmian wartości względnego momentu w betonie dla różnych klas betonu

Model uproszczony zakładający stałą wartość naprężeń można też stosować, jeżeli w przekroju jest rozciąganie. Podobnie jak w odniesieniu do przekroju prostokątnego, należy przy tym przyjąć, że $x_{eff} = \lambda_x$. Przekłada się to na zdefiniowanie efektywnego kąta $\alpha_{0,eff}$

$$\alpha_{0,eff} = a \cos \left[1 - \lambda (1 - \cos \alpha_0) \right].$$

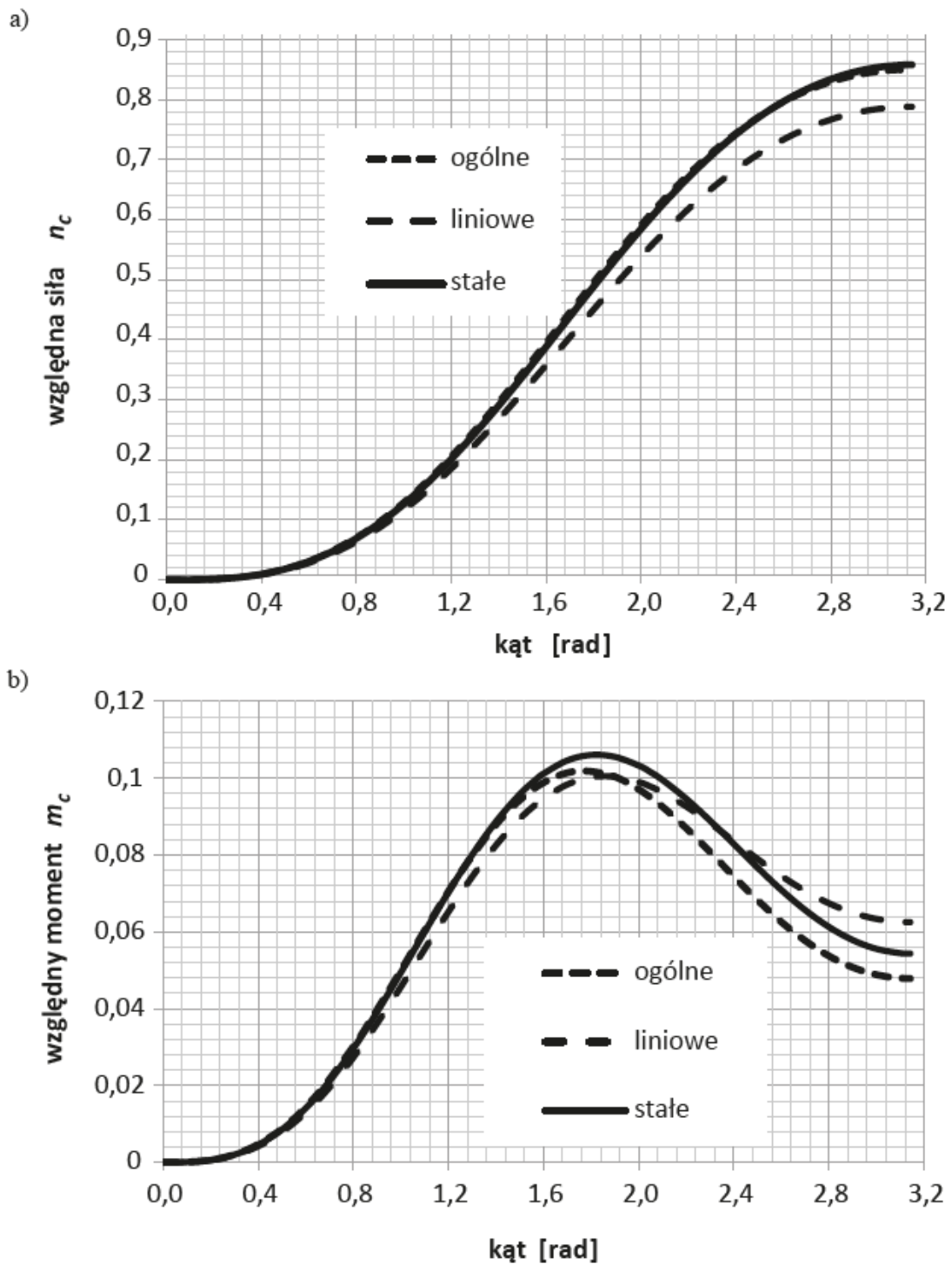
Przy stałej wartości naprężeń względna siła w betonie jest równa

$$n_c = \frac{1}{2\pi} (2\alpha_{0,eff} - \sin 2\alpha_{0,eff}).$$

Wartość względnego momentu obliczonego względem poziomej osi przekroju dana jest zależnością

$$m_c = \frac{1}{3\pi} \sin^3 \alpha_{0,eff}.$$

Na rysunku 12 pokazano wyniki obliczeń wykonane tymi trzema metodami. Zgodność wyników w odniesieniu do wartości względnej siły jest dobra. Można stwierdzić, że rezultaty otrzymane z modelu ogólnego i najbardziej uproszczonego są praktycznie takie same. Metoda uproszczona, która zakłada sprężysto-plastyczny model betonu okazuje się konserwatywna w tym sensie, że wartości siły są regularnie mniejsze w porównaniu z obu poprzednimi.



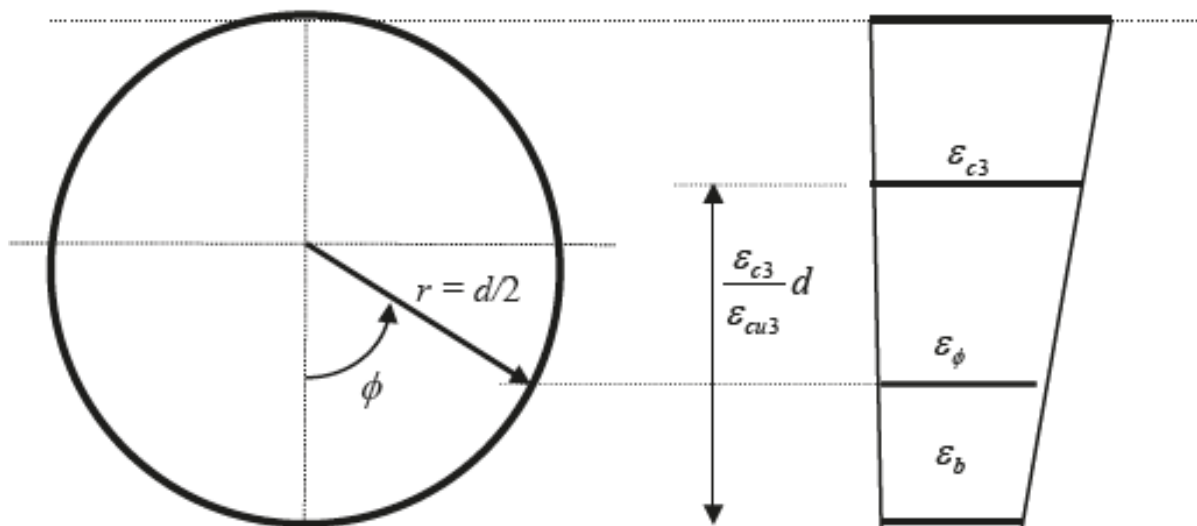
Rys. 12. Porównanie wyników otrzymanych dla trzech różnych modeli betonu

WYMIAROWANIE PRZEKROJÓW CAŁKOWICIE ŚCISKANYCH

W tym przypadku zmienną określającą poziom wyężenia przekroju – określającą rozkład odkształceń w przekroju jest odkształcenie ε_b w skrajnych mniej ściskanych włóknach betonu. Dodatkowe ograniczenie dotyczy odkształceń w betonie. W przekroju oddalonym od tej krawędzi o $h_1 = d \frac{\varepsilon_{c3}}{\varepsilon_{cu3}}$ odkształcenia w betonie nie mogą przekraczać ε_{c3} . Typowy rozkład odkształ-

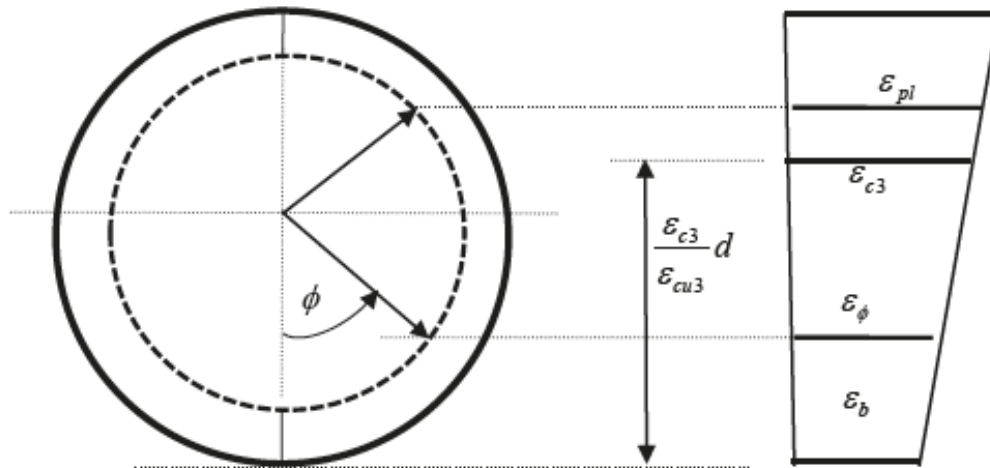
ceń pokazany jest na rysunku 13. Odkształcenie w betonie w przekroju określonym przez kąt ϕ dane jest równaniem

$$\varepsilon_\phi = \varepsilon_b + \frac{\varepsilon_{cu3} (\varepsilon_{c3} - \varepsilon_b)}{2\varepsilon_{c3}} (1 - \cos \phi).$$



Rys. 13. Układ odkształceń w betonie w przekroju całkowicie ściskanym

Zbrojenie



Rys. 14. Układ odkształceń w stali w przekroju całkowicie ściskanym

Rozkład odkształceń w stali w zależności od kąta ϕ opisuje wzór

$$\varepsilon_{\phi} = \varepsilon_b + \frac{\varepsilon_{cu3}(\varepsilon_{c3} - \varepsilon_b)}{2\varepsilon_{c3}} \left[1 - \left(1 - \frac{a}{r} \right) \cos \phi \right].$$

Graniczną wartość kąta ϕ_1 , powyżej której stal jest wykorzystana ($\sigma_s = f_{yd}$) można wyznaczyć, wstawiając do wzoru (5.43) $\varepsilon_{\phi} = \varepsilon_{pl}$. Otrzymuje się wtedy

$$\cos \phi_1 = \frac{1}{\left(1 - \frac{a}{r} \right)} \left[1 - \frac{2\varepsilon_{c3}(\varepsilon_{pl} - \varepsilon_b)}{\varepsilon_{cu3}(\varepsilon_{c3} - \varepsilon_b)} \right]$$

Wzór $\varepsilon_{\phi} = \varepsilon_b + \frac{\varepsilon_{cu3}(\varepsilon_{c3} - \varepsilon_b)}{2\varepsilon_{c3}} \left[1 - \left(1 - \frac{a}{r} \right) \cos \phi \right]$ można zapisać w postaci

$$\varepsilon_{\phi} = \beta_1 - \beta_2 \cos \phi,$$

gdzie $\beta_1 = \frac{\varepsilon_b(2\varepsilon_{c3} - \varepsilon_{cu3}) + \varepsilon_{cu3}\varepsilon_{c3}}{2\varepsilon_{c3}}$ oraz $\beta_2 = \frac{\varepsilon_{cu3}(\varepsilon_{c3} - \varepsilon_b)}{2\varepsilon_{c3}} \left(1 - \frac{a}{r} \right)$.

Względną wartość siły oblicza się zgodnie z $dN_s(\phi) = \frac{A_s f_{yd} \varepsilon_s(\phi)}{2\pi \varepsilon_{pl}} d\phi$, co prowadzi do zależności

$$n_s = \frac{N_s}{f_{cd} A_c} = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\phi_1} \frac{\varepsilon_s(\phi)}{\varepsilon_{pl}} d\phi + \frac{\omega}{\pi} \int_{\phi_1}^{\pi} d\phi.$$

Pierwsza z całek jest równa

$$n_{s1} = \frac{\omega}{\pi \varepsilon_{pl}} \int_0^{\phi_1} (\beta_1 - \beta_2 \cos \phi) d\phi = \frac{\omega}{\pi \varepsilon_{pl}} (\beta_1 \phi_1 - \beta_2 \sin \phi_1),$$

a druga

$$n_{s2} = \frac{\omega}{\pi} \int_{\phi_1}^{\pi} d\phi = \frac{\omega}{\pi} (\pi - \phi_1).$$

Wartość momentu obliczonego względem osi poziomej oblicza się z ogólnej zależności, która przybiera teraz następującą postać:

$$m_s = -\left(1 - \frac{a}{r}\right) \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\varepsilon_s(\phi)}{\varepsilon_{pl}} \cos \phi d\phi = -\left(1 - \frac{a}{r}\right) \frac{\omega}{2\pi \varepsilon_{pl}} \int_0^{\phi_1} (\beta_1 \cos \phi - \beta_2 \cos^2 \phi) d\phi - \left(1 - \frac{a}{r}\right) \frac{\omega}{2\pi} \int_{\phi_1}^{\pi} \cos \phi d\phi$$

Po wykonaniu całkowania otrzymuje się

$$m_s = \left(1 - \frac{a}{r}\right) \frac{\omega}{2\pi \varepsilon_{pl}} \left[\beta_1 \sin \phi_1 - \frac{1}{2} \beta_2 \left(\frac{1}{2} \sin 2\phi_1 + \phi \right) \right] + \left(1 - \frac{a}{r}\right) \frac{\omega}{2\pi} \sin \phi_1.$$

Beton

Odształcenie w betonie w przekroju określonym przez kąt dane jest równaniem

$$\varepsilon_{\phi} = \varepsilon_b + \frac{\varepsilon_{cu3}(\varepsilon_{c3} - \varepsilon_b)}{2\varepsilon_{c3}}(1 - \cos\phi)$$

Po wstawieniu do niego $\varepsilon_{\phi} = \varepsilon_{c3}$ otrzymuje się wartość kąta, przy którym naprężenia w betonie osiągną wartość f_{cd} ,

$$\varphi_1 = \arccos\left(1 - \frac{2\varepsilon_{c3}}{\varepsilon_{cu3}}\right).$$

Równanie można zapisać w postaci analogicznej do tej, którą wykorzystano przy wyznaczaniu sił w zbrojeniu:

$$\varepsilon_{\phi} = \beta_{11} - \beta_{21} \cos\phi,$$

gdzie

$$\beta_{11} = \frac{\varepsilon_b(2\varepsilon_{c3} - \varepsilon_{cu3}) + \varepsilon_{cu3}\varepsilon_{c3}}{2\varepsilon_{c3}} \text{ oraz } \beta_{21} = \frac{\varepsilon_{cu3}(\varepsilon_{c3} - \varepsilon_b)}{2\varepsilon_{c3}}.$$

W przedziale $\phi \in \langle 0; \varphi_1 \rangle$ naprężenie w betonie określa zależność

$$\sigma_c = f_{cd} \frac{\beta_{11} - \beta_{21} \cos\phi}{\varepsilon_{c3}}.$$

W związku z tym wartość względnej siły podana jest następującą całką:

$$n_{c1} = \frac{2}{\pi\varepsilon_{c3}} \int_0^{\varphi_1} \sin^2\phi (\beta_{11} - \beta_{21} \cos\phi) d\phi =$$

$$\frac{\beta_{11}}{\pi\varepsilon_{c3}} (\varphi_1 - \sin\varphi_1 \cos\varphi_1) - \frac{2}{3\pi\varepsilon_{c3}} \beta_{21} \sin^3\varphi_1$$

W przedziale od naprężenia są stałe, a siła jest równa

$$n_{c2} = \frac{2}{\pi} \int_{\phi_1}^{\pi} \sin^2 \phi d\phi = \frac{1}{\pi} (\pi - \phi_1 + \sin \phi_1 \cos \phi_1).$$

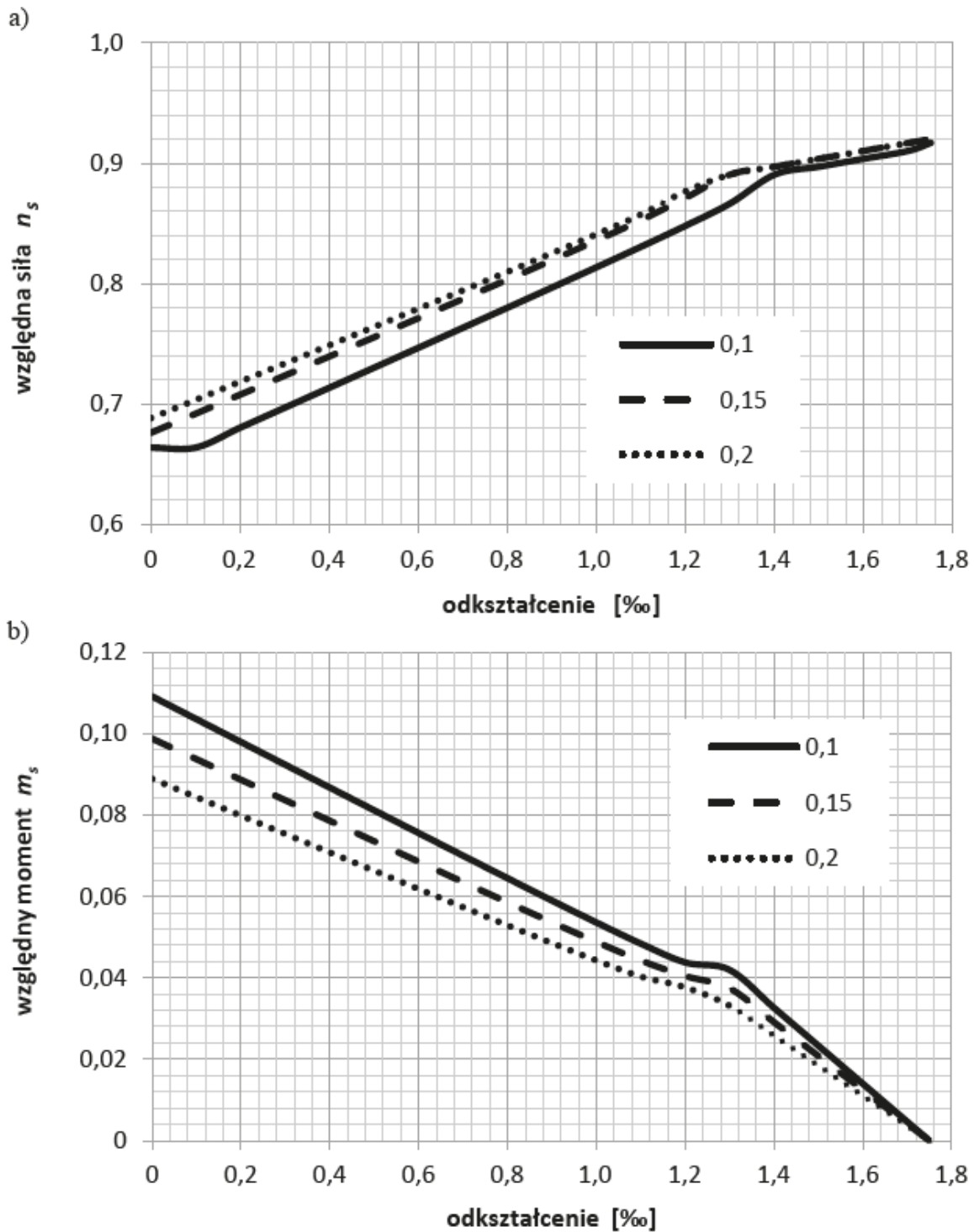
W podobny sposób można wyznaczyć momenty wywołane tymi siłami. Ramię sił (z uwzględnieniem znaku) ma wartość $-r \cos \phi$. Wartości względnych składowych tego momentu określona jest następującymi zależnościami:

$$m_{c1} = \frac{1}{\pi \varepsilon_{c3}} \int_0^{\phi_1} (\beta_{12} \cos^2 \phi \sin^2 \phi - \beta_{11} \sin^2 \phi \cos \phi) d\phi =$$

$$\frac{\beta_{12}}{8\pi \varepsilon_{c3}} \left[\sin(2\phi_1) \left(\sin^2 \phi_1 - \frac{1}{2} \right) + \phi_1 \right] - \frac{\beta_{11}}{3\pi \varepsilon_{c3}} \sin^3 \phi$$

$$m_{c2} = -\frac{1}{\pi} \int_{\phi_1}^{\pi} \cos \phi \sin^2 \phi d\phi = \frac{1}{3\pi} \sin^3 \phi_1.$$

Na rysunku 14 pokazane są rozkłady względnej siły i względnego momentu generowanych przez zbrojenie w przekroju. Zostały one sporządzone dla betonu klasy C50/60 przy trzech różnych wartościach stosunku a/d . Widać, że zmiany te a/d są, z pominięciem drobnego zaburzenia, praktycznie liniowe.



Rys. 14. Wykresy względnej siły (a) i względnego momentu (b) jako funkcji odkształcenia dla trzech wartości a/d

WYZNACZANIE NOŚNOŚCI PRZEKROJÓW KOŁOWYCH

Wymiarowanie przekrojów kołowych jest niemożliwe w sposób analityczny. Wynika to ze struktury wzorów opisujących równania równowagi. Nawet zastosowanie metody uproszczonej w odniesieniu do przekrojów ze strefą rozciąganą prowadzi do układu równań przestępnych, w których jedną z niewiadomych jest kąt określający zasięg strefy ściskanej oraz jego funkcje trygonometryczne. Problem ten można rozwiązać dwójako:

- a) skorzystać z programów komputerowych przyjmujących kolejno wartości tego kąta i sprawdzających spełnienie warunków równowagi;
- b) zastosować rozwiązania graficzne związane z krzywymi interakcji **m-n** (krzywymi granicznymi). Sporządza się je, wykorzystując warunki równowagi. Można je zapisać w postaci:

$$n_{Ed} = 0.8n_c(\alpha_0) + \omega n_s(\alpha_0),$$

$$m_{Ed} = 0.8m_c(\alpha_0) + \omega m_s(\alpha_0).$$

We wzorach tych $\omega = \rho \frac{f_{yd}}{f_{cd}}$, a przykładowe wartości współczynników n_c , n_s , m_c i m_s zestawiono w tabeli 1.

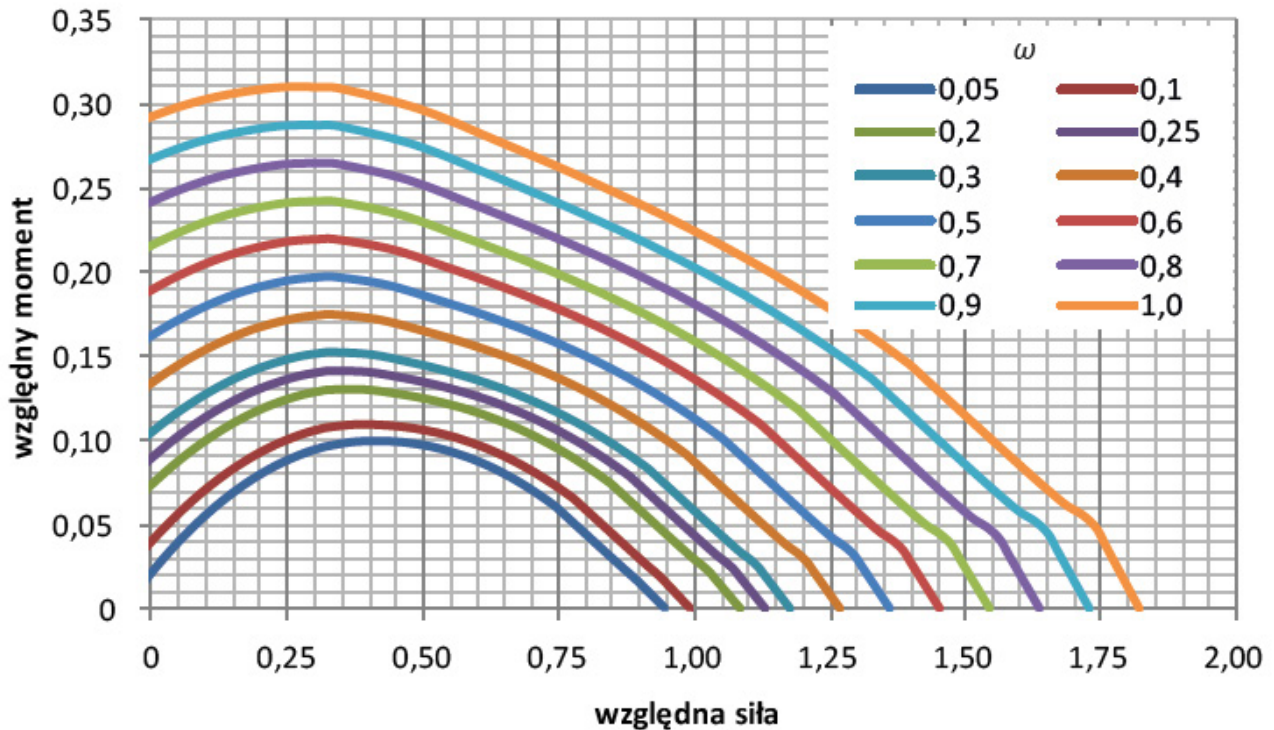
Zostały one obliczone na podstawie przedstawionych wcześniej wzorów dla betonów klasy nie wyższej niż C50/60 i stosunku $a/r = 0,2$. Liczba 0,8 występująca we wzorach wynika z tego, że zgodnie z normą należy, w przypadku gdy szerokość przekroju maleje ze wzrostem odkształceń w betonie, przyjmować tak zredukowaną wartość wytrzymałości betonu. Krzywe graniczne wykreśla się w ten sposób, że dla kolejnych wartości oblicza się wartości współrzędnych (n_{Ed} , m_{Ed}).

WYMIAROWANIE SŁUPÓW O PRZEKROJU KOŁOWYM

Tabela 1. Wartości współczynników w równaniach równowagi [5.59], [5.60] (klasy betonu do C50/60, stal $\sigma_s = 500$ MPa, $a/r = 0,2$)

		Zbrojenie		Beton	
		η_s	m_s	η_c	m_c
α_0	0,80	-0,7140	0,1059	0,0636	0,0273
	1,00	-0,5087	0,1685	0,1162	0,0456
	1,20	-0,3211	0,2100	0,1852	0,0652
	1,40	-0,1495	0,2279	0,2674	0,0825
	1,57	0,0000	0,2260	0,3442	0,0934
	1,60	0,0269	0,2238	0,3577	0,0947
	1,80	0,2370	0,1871	0,4502	0,1002
	2,00	0,3970	0,1541	0,5387	0,0990
	2,20	0,5075	0,1303	0,6177	0,0927
	2,40	0,5838	0,1132	0,6833	0,0836
	2,60	0,6353	0,1013	0,7331	0,0745
	2,80	0,6678	0,0937	0,7665	0,0674
	3,00	0,6846	0,0897	0,7842	0,0633
ε_b	0,00	0,6880	0,0888	0,7878	0,0625
	0,20	0,7183	0,0798	0,8120	0,0554
	0,40	0,7485	0,0708	0,8363	0,0482
	0,60	0,7789	0,0618	0,8605	0,0411
	0,80	0,8096	0,0529	0,8848	0,0339
	1,00	0,8409	0,0442	0,9091	0,0268
	1,20	0,8766	0,0376	0,9333	0,0196
	1,40	0,8970	0,0258	0,9576	0,0125
	1,60	0,9101	0,0110	0,9818	0,0054
	1,75	0,9200	0,0000	1,0000	0,0000

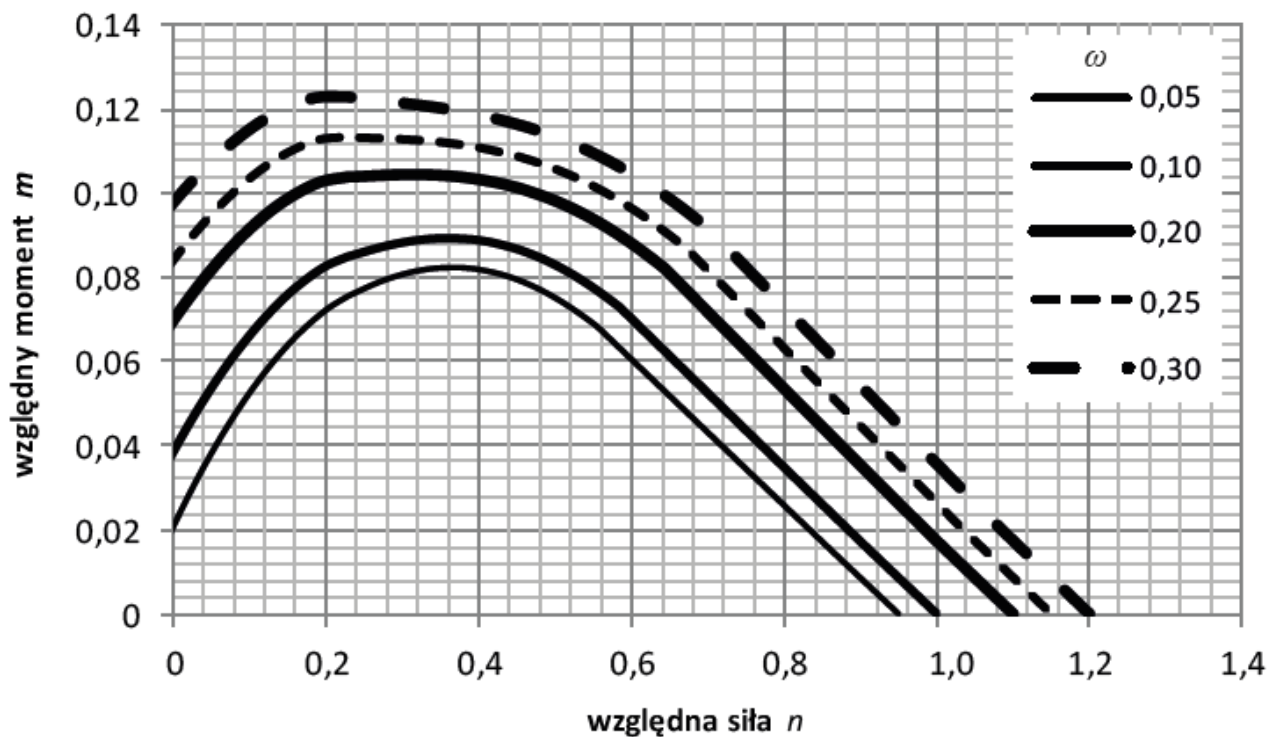
Na rysunku 15 pokazano takie właśnie krzywe. Dolną granicą ω jest 0,05, co w przypadku typowego betonu klasy C30/37 i stali o $f_{yk} = 500$ MPa odpowiada stopniowi zbrojenia $\rho = 0,25\%$, a górną jest $\omega = 1$ i $\rho \approx 5\%$.



Rys. 15. Wykresy krzywych granicznych dla betonów klasy do C50/60 i $a/d = 0,1$ jako funkcji intensywności zbrojenia $\omega = \rho \frac{f_{yd}}{f_{cd}}$

Wymiarowanie polega na graficznym ustaleniu, na której krzywej (lub blisko) leży punkt o współrzędnych (n_{Ed}, m_{Ed}) . Na przykład dla $(0,5; 0,2)$ odczytano $\omega = 0,6$. Oznacza to, że dla prezentowanych wcześniej danych $\rho = 3,0\%$. Dokładność takiego postępowania związana jest z „gęstością” krzywych granicznych, czyli skokiem wartości ω . Przy można przyjąć, że . Dokładność można poprawić, stosując interpolacje pomiędzy krzywymi.

Struktura wzorów wskazuje, że na kształt tych krzywych ma wpływ nie tylko wartość parametru ω , ale również klasa betonu (jeżeli jest wyższa niż C50/60) i stosunek a/r . W przypadku betonów o wyższej wytrzymałości trzeba dla każdej z tych klas sporządzać krzywe graniczne osobno. Konieczność ta wynika z tego, że każdorazowo charakterystyczne parametry opisujące zależności pomiędzy odkształceniami i naprężeniami w betonie – ϵ_{c3} i ϵ_{cu3} – przyjmują różne wartości. Na rysunku 16 pokazano przykładowo przebieg takich krzywych dla betonu klasy C80/95, stali o $f_{yk} = 500$ MPa i $a/r = 0,2$.

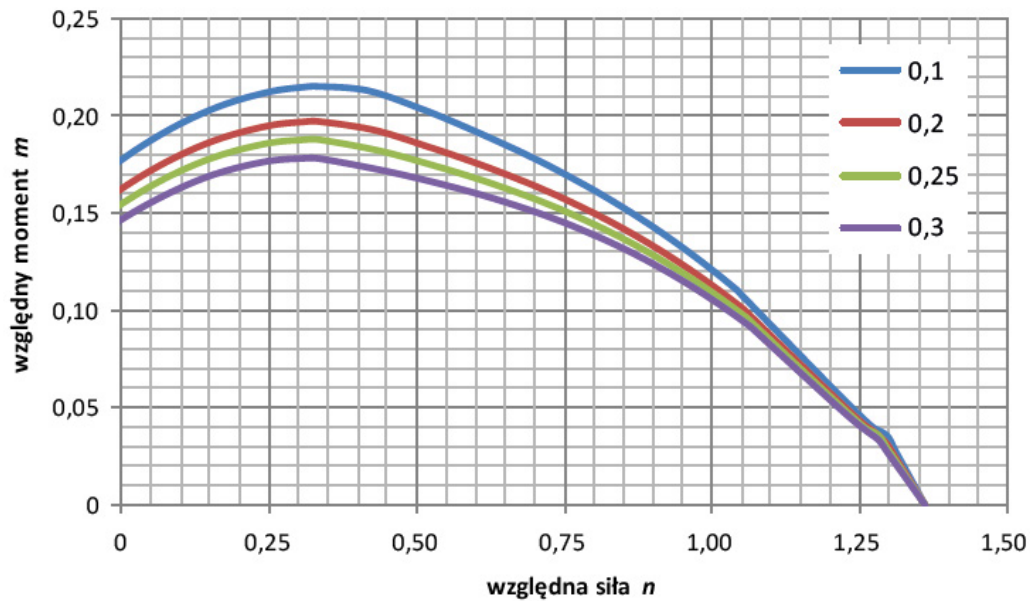


Rys. 16. Przebieg krzywych granicznych dla betonu klasy C80/95

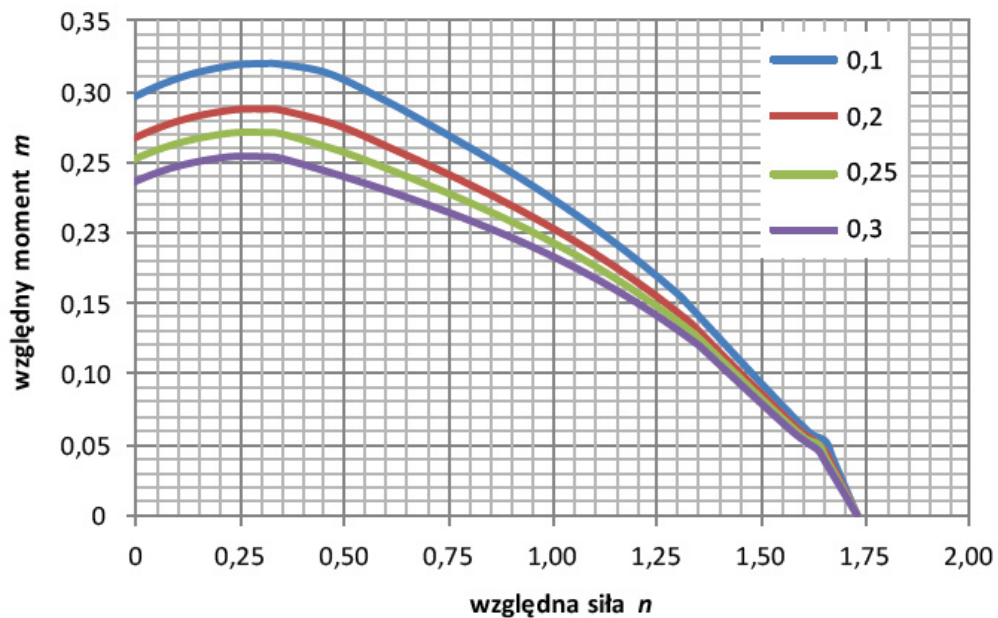
Maksymalna wartość $\omega = 0,3$ odpowiada stopniowi zbrojenia $\rho = 4,0\%$. Mniejsze wartości względnego momentu i względnej siły są wyraźne w porównaniu z betonem klasy C50/60. Nie oznacza to oczywiście, że przekrój wykonany z mocniejszego betonu przenosi mniejsze obciążenia. Przy przejściu na wartości bezwzględne stosuje się bowiem mnożnik, który zależy liniowo od f_{cd} . Przebieg krzywych granicznych zależy również od wartości stosunku a/r . Na rysunkach 17 i 18 pokazano takie krzywe przy dwóch różnych wartościach $\omega = 0,5$ i $\omega = 0,9$. Łatwo jest zauważyć następujące zależności:

- ze wzrostem wartości ω wzrasta różnica pomiędzy krzywymi granicznymi przy zmieniającym się stosunku a/r ;
- różnice pomiędzy przebiegiem krzywych granicznych maleją ze wzrostem n ; maksymalne różnice występują przy wartościach n odpowiadających maksymalnym wartościom m .

Podsumowując można stwierdzić, że problem wymiarowania słupów o przekroju kołowym i wyznaczenia ich nośności wiąże się z koniecznością sporządzenia dużej liczby nomogramów dla kilku klas betonów i wartości stosunku a/r lub korzystania z programów komputerowych. Nie jest to sytuacja komfortowa dla projektantów. Trzeba też zaznaczyć, że ze względu na to, iż w przekroju kołowym wzrostowi odkształceń w betonie towarzyszy zmniejszenie szerokości przekroju, w ostatecznym kroku należy przyjmować zmniejszoną wartość $f = 0,8f_{cd}$. Wymóg ten dotyczy wszystkich możliwych modeli betonu, a nie tylko metody uproszczonej, jak może to sugerować norma.



Rys. 17. Wykresy krzywych granicznych przy $\omega = 0,5$ dla czterech różnych wartości a/r



Rys. 18. Wykresy krzywych granicznych przy $\omega = 0,9$ dla czterech różnych wartości a/r

W opisanym przypadku celowe jest opracowanie prostszych przybliżonych metod wymiarowania. Mogą one stanowić pierwszy krok przy dokładnych obliczeniach, bądź też ostateczne rozwiązanie wtedy, gdy duża precyzja nie jest konieczna.

WYMIAROWANIE PRZEKROJÓW KOŁOWYCH W SPOSÓB PRZYBLIŻONY

Stoła pomysłu sprowadza się do linearyzacji zależności opisujących siły i wywołane nimi momenty w betonie i stali. Z ich przebiegu wynika, że linearyzacje te należy przeprowadzić przedziałami. Osobno należy rozpatryć przypadek, gdy w przekroju jest strefa rozciągana i kiedy cały przekrój jest ściskany. W tym pierwszym przypadku można, analizując wykresy zależności pomiędzy kątem α_0 a wartościami względnej siły w stali, ustalić następujące przedziały:

- od zera do miejsca, gdzie stal przestaje być w pełni wykorzystana na rozciąganie; przedział $\alpha \in [0, \phi_0]$, wartość $n_s = -\omega$ jest stała;
- przedział $\alpha \in [\phi_0, \pi / 2]$, wartość siły zmienia się liniowo od $n_s = -\omega$ do $n_s = 0$;
- przedział $\alpha \in [\pi, 2 / \pi]$, wartość siły zmienia się liniowo od $n_s = 0$ do $n_s = n_{smax}$.

Pierwszy przedział obejmuje zakres kąta α_0 , który określa zasięg strefy ściskanej od zera do wartości ϕ_0 odpowiadającej granicy pełnego wykorzystania całej stali na rozciąganie. W przedziale tym względna siła w stali jest stała i wynosi $n_s = -\omega$, a względny moment $m_s = 0$. Wartość tego kąta wyznacza się, korzystając ze wzoru

$$\cos \beta_t = \frac{\frac{\varepsilon_{pl}}{\varepsilon_{cu3}}(\cos \alpha - 1) + \cos \alpha}{\left(1 - \frac{a}{r}\right)}$$

i podstawiając $\beta_t = 0$ tam. Po przekształceniu otrzymuje się następującą zależność:

$$\cos \phi_0 = \frac{\left(1 - \frac{a}{r}\right) + \frac{\varepsilon_{pl}}{\varepsilon_{cu3}}}{\left(1 + \frac{\varepsilon_{pl}}{\varepsilon_{cu3}}\right)}$$

Wartości tego kąta zależą od klasy betonu oraz stosunku a/r . Zostały one zestawione w tabeli 2.

Tabela 2. Zestawienie wartości kąta ϕ_0 odpowiadającej granicy pełnego wykorzystania stali zbrojeniowej na rozciąganie

Klasa betonu	ε_{cu3}	a/r					
		0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35
C50/60	3,5	0,3531	0,4336	0,5020	0,5628	0,6182	0,6696
C55/67	3,1	0,3446	0,4231	0,4898	0,5490	0,6030	0,6530
C60/75	2,9	0,3397	0,4171	0,4828	0,5412	0,5943	0,6436
C70/85	2,7	0,3344	0,4105	0,4752	0,5326	0,5848	0,6332
C80/95	2,6	0,3316	0,4070	0,4711	0,5279	0,5797	0,6277
C90/105	2,6	0,3316	0,4070	0,4711	0,5279	0,5797	0,6277

W przypadku gdy w przekroju występuje rozciąganie, model zakładający stałą wartość naprężeń w strefie ściskanej betonu prowadzi do wyników zgodnych z innymi modelami. Ze względu na jego postać jest on wygodniejszy rachunkowo. Wykorzystuje się w nim „efektywny” kąt. Analogicznie wartości kąta $\phi_{0,eff}$ zostały zawarte w tabeli 3.

Tabela 3. Zestawienie wartości kąta $\phi_{0,eff}$ odpowiadającej granicy pełnego wykorzystania stali na rozciąganie

Klasa betonu	ε_{cu3}	a/r					
		0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35
C50/60	3,5	0,3155	0,3872	0,4480	0,5020	0,5511	0,5966
C55/67	3,1	0,3055	0,3749	0,4337	0,4859	0,5333	0,5772
C60/75	2,9	0,2987	0,3666	0,4241	0,4751	0,5214	0,5643
C70/85	2,7	0,2893	0,3549	0,4106	0,4599	0,5046	0,5460
C80/95	2,6	0,2820	0,3459	0,4001	0,4480	0,4917	0,5320
C90/105	2,6	0,2771	0,3398	0,3930	0,4401	0,4829	0,5225

Wartości względnej siły w betonie dla powyższych kątów – na końcu pierwszego odcinka – można określić ze wzoru

$$n_c = \frac{1}{2\pi} (2\alpha_{0,eff} - \sin 2\alpha_{0,eff})$$

W odniesieniu do betonów klas wyższych niż C50 należy przy tym zastosować współczynnik

$$\eta = 1,0 - \frac{f_{ck} - 50}{200}. \text{ Są one zestawione w tabeli 4.}$$

Tabela 4. Zestawienie wartości względnej siły n_{c0} odpowiadającej kątowi $\phi_{0,eff}$

Klasa betonu	a/r					
	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35
C50/60	0,0065	0,0120	0,0183	0,0255	0,0334	0,0420
C55/67	0,0058	0,0106	0,0163	0,0226	0,0297	0,0372
C60/75	0,0053	0,0097	0,0148	0,0207	0,0271	0,0340
C70/85	0,0045	0,0083	0,0128	0,0178	0,0233	0,0293
C80/95	0,0040	0,0073	0,0112	0,0156	0,0204	0,0257
C90/105	0,0036	0,0065	0,0100	0,0139	0,0182	0,0229

Tabela 5. Zestawienie wartości względnego momentu m_{c0} odpowiadającej kątowi $\phi_{0,eff}$

Klasa betonu	a/r					
	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35
C50/60	0,0032	0,0057	0,0086	0,0118	0,0152	0,0188
C55/67	0,0028	0,0051	0,0077	0,0105	0,0136	0,0168
C60/75	0,0026	0,0046	0,0070	0,0096	0,0125	0,0154
C70/85	0,0022	0,0040	0,0061	0,0083	0,0108	0,0134
C80/95	0,0019	0,0035	0,0053	0,0073	0,0095	0,0118
C90/105	0,0017	0,0031	0,0048	0,0066	0,0085	0,0106

Wartości analogicznego momentu podane są w tabeli 5. Równania równowagi sił i momentów w tym pierwszym przedziale można więc zapisać w następujących postaciach:

$$n_{Ed} = -\rho \frac{f_{yd}}{f_{cd}} + 0.8 \frac{\phi_{eff}}{\phi_{0,eff}} n_{c0},$$

$$m_{Ed} = 0 + 0.8 \frac{\phi_{eff}}{\phi_{0,eff}} m_{c0}.$$

Występujący w tych wzorach współczynnik 0,8 wynika z tego, że norma wymaga zastosowania go do redukcji wytrzymałości betonu, jeżeli kształt przekroju jest taki, że jego szerokość zmniejsza się w kierunku, w którym rosną odkształcenia w betonie. Niewiadomymi w tym przedziale są ϕ_{eff} oraz ρ .

Drugi z przedziałów kończy się, gdy $\phi = \frac{\pi}{2}$. Po przejściu na model zakładający stałą wartość naprężeń

w strefie ściskanej otrzymuje się odpowiedniki tego kąta ϕ_{eff} oraz wartości względnej siły i momentu w betonie. Zostały one zestawione w tabeli 6.

Tabela 6. Zestawienie wartości n_{cl} oraz m_{cl} odpowiadających kątowi ϕ_{eff}

Klasa betonu	50/55	55/67	60/75	70/85	80/95	90/105
λ	0,8000	0,7875	0,7750	0,7500	0,7250	0,7000
η	1,000	0,975	0,950	0,900	0,850	0,800
ϕ_{eff}	1,3694	1,3567	1,3439	1,3181	1,2922	1,2661
n_{cl}	0,3735	0,3566	0,3401	0,3083	0,2781	0,2495
m_{cl}	0,0998	0,0990	0,0981	0,0963	0,0943	0,0921

Korzystając z założenia o liniowej zmianie sił w stali i betonie, równanie równowagi sił można teraz zapisać w następującej postaci:

$$n_{Ed} = \omega \left[-1 + \frac{\phi - \phi_{0,eff}}{\phi_{1,eff} - \phi_{0,eff}} \right] + 0,8 \left[n_{c0} + \frac{n_{1c} - n_{c0}}{\phi_{1,eff} - \phi_{0,eff}} (\phi - \phi_{0,eff}) \right].$$

Dla $\phi_{1,eff}$ ($\pi/2$) otrzymuje się największą wartość momentu wygenerowanego przez siłę w zbrojeniu. Jego wartość można obliczyć, wykorzystując wzory:

$$m_{s1} = \left(1 - \frac{a}{r} \right) \frac{\omega}{2\pi} \sin \beta_c,$$

$$m_{s2} = \left(1 - \frac{a}{r} \right) \frac{\varepsilon_{cu2}}{\varepsilon_{pl}} \frac{\omega}{2\pi} \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{a}{r} \right) ([0,5 \sin 2\varphi + \varphi]) \right]_{\beta_c}^{\pi/2}.$$

Całkowitą wartość momentu oblicza się w tym przypadku zgodnie ze wzorem

$$m_s = 2(m_{s1} + m_{s2}).$$

Wartości kąta β_l zostały zestawione w tabeli 7. Są one funkcją klasy betonu i stosunku a/r .

Tabela 7. Zestawienie wartości kąta β_c

Klasa betonu	ε_{cu3}	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35
C50/60	3,5	0,8091	0,7514	0,6819	0,5950	0,4793	0,2992
C55/67	3,1	0,6774	0,6006	0,5021	0,3625	0,0000	0,0000
C60/75	2,9	0,5864	0,4909	0,3568	0,0316	0,0000	0,0000
C70/85	2,7	0,4632	0,3263	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
C80/95	2,6	0,3790	0,1810	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Na tej podstawie można ustalić wartości momentu m_{s1} wywołanego siłami w zbrojeniu. Są one zestawione w tabeli 8.

Tabela 8. Zestawienie wartości momentu m_{s1}

a/r	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35
C50/60	0,2617	0,2440	0,2260	0,2075	0,1884	0,1682
C55/67	0,2540	0,2355	0,2165	0,1966	0,1747	0,1506
C60/75	0,2485	0,2294	0,2094	0,1876	0,1634	0,1409
C70/85	0,2413	0,2211	0,1987	0,1746	0,1521	0,1312
C80/95	0,2319	0,1882	0,1456	0,1280	0,1115	0,0961

Drugie z równań równowagi dla tego przedziału ma następującą postać:

$$m_{Ed} = 0.8 \left[m_{c0} + \frac{m_{1c} - m_{c0}}{\phi_{1,eff} - \phi_{0,eff}} (\phi - \phi_{0,eff}) \right] + \omega m_{s1} \frac{(\phi - \phi_{0,eff})}{\phi_{1,eff} - \phi_{0,eff}}$$

Mamy układ równań liniowych z niewiadomymi ϕ oraz $\omega = \rho \frac{f_{yd}}{f_{cd}}$. Po wyeliminowaniu $\omega = \rho \frac{f_{yd}}{f_{cd}}$ oblicza się ϕ , sprawdza, czy należy do przedziału $(\phi_{0,eff}, \phi_{1,eff})$ i następnie oblicza się stopień zbrojenia.

Ostatni przedział kończy się dla $\alpha = \pi$. Wartości efektywnych kątów odpowiadające zestawiono w tabeli 9.

Tabela 9. Zestawienie wartości n_{c2} oraz m_{c2} odpowiadających kątowi $\phi_{2,eff}$

Klasa betonu	C50/55	C55/67	C60/75	C70/85	C80/95	C90/105
λ	0,8000	0,7875	0,7750	0,7500	0,7250	0,7000
η	1,000	0,975	0,950	0,900	0,850	0,800
$\phi_{2,eff}$	2,2143	2,1834	2,1532	2,0944	2,0376	1,9823
n_{c2}	0,8576	0,8447	0,8316	0,8045	0,7765	0,7477
m_{c2}	0,0543	0,0581	0,0618	0,0689	0,0756	0,0817

W tabelach 10 i 11 zamieszczono końcowe wartości względnej siły i względnego momentu wygenerowanych przez zbrojenie w tym punkcie.

Tabela 10. Wartości względnej siły w stali n_{s2}

	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35
C50/60	0,6635	0,6758	0,6880	0,7002	0,7123	0,7242
C55/67	0,6314	0,6415	0,6514	0,6611	0,6706	0,6797
C60/75	0,6122	0,6209	0,6293	0,6375	0,6452	0,6523
C70/85	0,5898	0,5969	0,6036	0,6097	0,6150	0,6192
C80/95	0,5772	0,5833	0,5888	0,5935	0,5970	0,5980

Tabela 11. Wartości względnego momentu w stali m_{s2}

	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35
C50/60	0,1091	0,0987	0,0888	0,0795	0,0706	0,0622
C55/67	0,1119	0,1017	0,0920	0,0827	0,0738	0,0653
C60/75	0,1127	0,1025	0,0928	0,0835	0,0745	0,0659
C70/85	0,1127	0,1025	0,0927	0,0832	0,0740	0,0650
C80/95	0,1122	0,1020	0,0921	0,0824	0,0729	0,0632

Warunek równowagi sił ma na tym odcinku następującą postać:

$$n_{Ed} = 0.8 \left[n_{c1} + \frac{n_{c2} - n_{c1}}{\phi_{eff,2} - \phi_{eff,1}} (\phi - \phi_{eff,1}) \right] + \omega n_{s2} \frac{\phi - \phi_{eff,1}}{\phi_{eff,2} - \phi_{eff,1}},$$

a warunek równowagi momentów

$$m_{Ed} = 0.8 \left[m_{c1} + \frac{m_{c2} - m_{c1}}{\phi_{eff,2} - \phi_{eff,1}} (\phi - \phi_{eff,1}) \right] + \omega \left[m_{s1} + \frac{m_{s2} - m_{s1}}{\phi_{eff,2} - \phi_{eff,1}} (\phi - \phi_{eff,1}) \right].$$

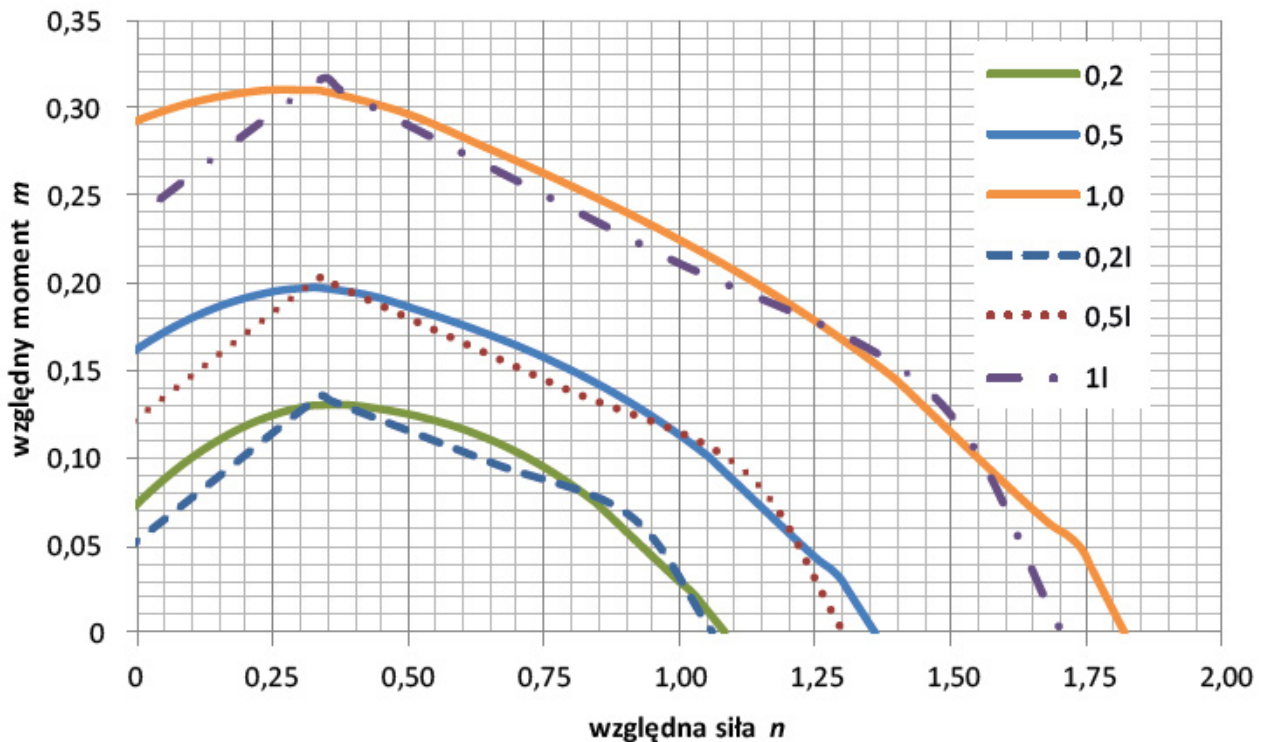
Podobnie jak w poprzednich przedziałach otrzymuje się układ liniowy równań z niewiadomymi ϕ oraz

$$\omega = \rho \frac{f_{yd}}{f_{cd}}.$$

Jeżeli cały przekrój jest ściskany, to korzystanie z uproszczonej zależności dla betonu nie jest już możliwe. Można natomiast zauważyć, że zmiany siły i momentu są praktycznie liniowe. W celu zachowania ciągłości

należy więc przyjąć na początku tego odcinka wartości równe n_{c2} , m_{c2} oraz n_{s2} , m_{s2} . Końcowe wartości odpowiadają przypadkowi, gdy cały przekrój jest równomiernie ściskany. Odpowiednie współrzędne są więc następujące:

$$n_{c3} = 0.8; \quad m_{c3} = 0; \quad n_{s3} = \omega \frac{\varepsilon_{c3}}{\varepsilon_{pl}}$$



Rys. 19. Przykładowe porównanie krzywych granicznych otrzymanych metodą dokładną i przybliżoną

Na rysunku 19 pokazano wykresy krzywych granicznych otrzymane z metody dokładnej oraz opisanej powyżej przybliżonej dla trzech wartości ω : -0,2, 0,5 i 1,0. Wyniki otrzymane z rozwiązań przybliżonych zaznaczono liniami przerywanymi. Wykresy zostały wykonane dla betonu klasy C50/60 i $a/r = 0,2$. Widać, że przybliżona metoda stanowi dobrą aproksymację. Większe różnice występują jedynie w pierwszym przedziale, gdzie zasięg strefy ściskanej jest mniejszy niż $\alpha_0 \leq \pi/2$. Ogólnie można też stwierdzić, że metoda przybliżona jest konserwatywna, co znaczy, że jest bezpieczna. Z tego względu można uznać, że doskonale nadaje się do przybliżonych rozwiązań inżynierskich.



 NA PODSTAWIE:

Projektowanie słupów żelbetowych
(Wydawnictwo Naukowe PWN 2020),
autor: Janusz Pędziwiatr

ZOBACZ

 **IBUK *libra***
NAJLEPSZA CZYTELNIĄ ONLINE

 PWN  PZWL

**Dzięki Twojej bibliotece czytasz
gdzie chcesz i kiedy chcesz!**

Wejdź na **libra.ibuk.pl**



Zapytaj w bibliotece,
jak zacząć korzystać
z IBUKA Libry



Pobierz Przewodnik
użytkownika ze strony
libra.ibuk.pl/pomoc



Wejdź na
facebook.com/PWNNauka
i dodaj do obserwowanych



Czytaj 24/7 na urządzeniach:



 ZOBACZ RÓWNIEŻ:



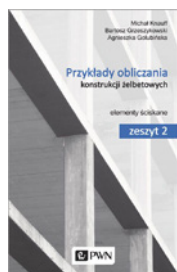
Żelbetowe zbiorniki na ciecze i materiały sypkie
(Wydawnictwo Naukowe PWN, 2021),
Autorki: Anna Halicka, Dominika Joanna Franczak-Balmas

[Sprawdź](#)



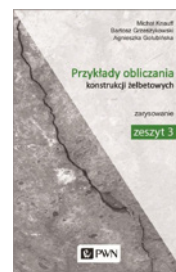
Przykłady obliczenia konstrukcji żelbetowych. Zeszyt 1
(Wydawnictwo Naukowe PWN, 2022),
Autorzy: Agnieszka Golubińska, Michał Knauff, Piotr Knyziak

[Sprawdź](#)



Przykłady obliczenia konstrukcji żelbetowych. Zeszyt 2
(Wydawnictwo Naukowe PWN, 2022),
Autorzy: Agnieszka Golubińska, Bartosz Grzeszykowski, Michał Knauff

[Sprawdź](#)



Przykłady obliczenia konstrukcji żelbetowych. Zeszyt 3
(Wydawnictwo Naukowe PWN, 2022),
Autorzy: Michał Knauff, Bartosz Grzeszykowski, Agnieszka Golubińska

[Sprawdź](#)



Tablice i wzory do projektowania konstrukcji żelbetowych z przykładami obliczeń
(Wydawnictwo Naukowe PWN, 2022),
Autorzy: Agnieszka Golubińska, Michał Knauff, Piotr Knyziak

[Sprawdź](#)



Obliczanie konstrukcji żelbetowych według Eurokodu 2
(Wydawnictwo Naukowe PWN, 2020),
Autor: Michał Knauff

[Sprawdź](#)

Zainteresowały Cię nasze książki?

Znajdziesz je w:



IBUK *libra*

[Przejdź do IBUK libra](#)

IBUK Libra to czytelnia on-line czynna całą dobę. Dostępne w niej są tysiące e-booków oraz e-czasopism z niemal każdej dziedziny. Do IBUKA Libry możesz zalogować się z dowolnego miejsca, o każdej porze. Korzystanie z IBUKA Libry jest bezpłatne – poproś o dostęp w swojej bibliotece.



IBUK

[Przejdź do IBUK.pl](#)

IBUK.pl jest platformą pozwalającą kupować i wypożyczać e-booki. Można je wypożyczać zarówno pojedynczo – już od 4,92 PLN za dobę oraz w abonamentach – ceny zaczynają się od 19,90 PLN miesięcznie. W ofercie dostępne są także audiobooki.



PWN KSIĘGARNIA
INTERNETOWA

[Przejdź do ksiegarnia.pwn.pl](#)

Księgarnia Internetowa PWN oferuje szeroki zakres publikacji: podręczniki akademickie, książki naukowe i popularnonaukowe, słowniki języka polskiego i słowniki języków obcych. Znajdziesz w niej zarówno publikacje papierowe, jak i książki w wersji elektronicznej – e-booki i audiobooki.

Śledź nas na





Niniejszy e-book jest dziełem twórcy i wydawcy. Prosimy, abyś przestrzegał praw, które im przysługują.
Nie publikuj go w Internecie. Cytując jego fragmenty, nie zmieniaj ich treści i koniecznie zaznacz, czyje to dzieło.
Kopiując jego część, rób to jedynie na użytek osobisty.

© Wydawnictwo Naukowe PWN SA
02-460 Warszawa, ul. Gottlieba Daimlera 2

www.pwn.pl